

不均一クラスタにおける
最適構成予測手法の適用と評価
Application and Evaluation of Optimal
Configuration Estimation Scheme for
Heterogeneous Clusters

豊橋技術科学大学 大学院 工学研究科
知識情報工学専攻 市川研究室

023719 高橋翔

平成 18 年 1 月 13 日

知識情報工学専攻	学籍番号	023719
申請者氏名	高橋 翔	

指導教員氏名	市川 周一
--------	-------

論文要旨 (修士)

論文題目	不均一クラスタにおける最適構成予測手法の適用と評価
------	---------------------------

既存の並列応用の多くは要素プロセッサ (PE) が均一であることを前提としており, PE 性能が不均一なクラスタ (不均一クラスタ) 上では低速 PE がボトルネックとなって実効性能が低下する. 不均一クラスタ上では, PE 性能に応じた不均一な負荷分散手法が必要である. マルチプロセス法は PE 性能に応じた負荷分散手法の一つであり, 高性能 PE に複数プロセスを割り当てることで不均一な負荷分散を行う. マルチプロセス法で実行時間を最小化するには, 最適な使用 PE, プロセス割当の構成を求めることが必要である.

過去の研究で, 岸本は High Performance Linpack (HPL) にマルチプロセス法を適用し, 実測結果から実行時間予測モデルを構築し, 最適な構成の予測に成功している. しかし, HPL 以外の応用に適用できるか明らかでない, PE が 3 種類の環境で精度が低下している, 等の問題が残っている. 本研究では, 岸本のモデルを 4 つの並列応用 (HimenoBMT, hpcmw-solver-test, FFTE, HPL) に適用し, 予測モデルを改良して精度を向上することを目的とする.

本研究では, 岸本の提案した N-T, P-T モデルに対して, 新たに NP-T モデルを提案する. NP-T モデルは応用の実行時間式を問題サイズ N とプロセス数 P で構築したモデルである. NP-T モデルは岸本のモデルに比べて正確なモデル化が可能と考えられる. また, 構築に必要な時間も P-T モデルと同等である. N-T, P-T, NP-T モデルを用いて最適な構成を予測し, 予測最適構成と実測による最適構成の実行時間を比較する.

プロセッサ 3 種類で構成される不均一クラスタ上で実測最適構成に対する誤差を評価した結果, 問題サイズ N が大きい領域で, P-T モデルの誤差は HimenoBMT で 30%, hpcmw-solver-test で 9%, HPL で 40%, FFTE で 1000%程度であった. 一方, NP-T モデルは HimenoBMT で 30%, hpcmw-solver-test で 9%, HPL で 0%, FFTE で 200%程度であった. P-T, NP-T モデルは HimenoBMT, hpcmw-solver-test, HPL では予測に成功したが FFTE では予測精度が低い結果となった. また, NP-T モデルは P-T モデルより高速な構成を予測することが確認でき, 有効性を確認できた.

なお, 本研究ではスイッチが 1 段で評価を行っているが, 大規模クラスタではスイッチが多段になり, 通信時間が変化すると考えられる. 今後はスイッチが多段になった場合に高精度な通信時間モデルを構築することが課題となる. また, クラスタが大規模になった場合には予測に要する時間が増大するため, 予測時間の削減も課題となる.

Application and Evaluation of Optimal Configuration Estimation Scheme for Heterogeneous Clusters

Graduate Adviser : Shuichi Ichikawa

023719 Sho Takahashi

1 Background

Many parallel applications are targeted for clusters comprised of *homogeneous* processing elements (PEs). Since their performances are degraded by load imbalance on a *heterogeneous* cluster, it is necessary to distribute workloads considering the performance of each PE. It is a simple solution to invoke multiple processes on fast PEs (multiprocessing). Kishimoto and Ichikawa [1] constructed the execution-time estimation models from measurement results of HPL (High Performance Linpack), and showed that the (sub-)optimal configurations were actually estimated for multiprocessing. This study first examines Kishimoto's models on four applications, and then introduces a new model that is more accurate than Kishimoto's.

2 Execution-Time Estimation Model

2.1 Kishimoto's Models

Let N be the size of the problem. G_i is a group of PEs comprised of equivalent PEs in heterogeneous cluster. P_i is the number of PEs actually used for the job in G_i . M_i is the number of processes on each PE in G_i . P is the total number of processes in the cluster; i.e., $P = \sum_i P_i M_i$. T_i is the execution time of G_i , which is parameterized by N , P , and M_i . Total execution time T is estimated by $\max_i T_i$. The estimation function of T is designated by "execution-time estimation model" in the following discussion. Optimal configurations are estimated using the models of all possible configurations (P_i, M_i).

In case of HPL, T is given by Eq. (1), and thus T_i for $\exists(P_i, M_i)$ is represented by Eq. (2). Constant factors k_0, \dots, k_3 are determined from the measurement results by the least squares method. This model is designated by *N-T* model [1].

It takes long time to construct *N-T* models, because they are constructed for all possible configurations (P_i, M_i). We can reduce the number of models by integrating *N-T* models into one new model that includes P as a parameter. Assuming that T_i is independent of the target of communication, this new model is given by Eq. (3), which is designated by *P-T* model. It takes shorter time to construct *P-T* models than *N-T* models, because *P-T* models are constructed from the measurements on G_i s. Constant factors are extracted from the corresponding *N-T* models ($PEs \geq 2$).

$$T(N, P) = \frac{1}{P} \cdot O(N^3) + P \cdot O(N^2) + O(N^2) \quad (1)$$

$$T(N)|_{P, M_i} = k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3 \quad (2)$$

$$T_i(N, P)|_{M_i} = \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P, M_i} + k_1 P \cdot T_i(N)|_{P, M_i} + k_2 \quad (3)$$

2.2 NP-T Model

Equation (1) is transformed to Eq. (4), using parameters N and P . This model is designated by *NP-T* model. An *NP-T* model includes more constant factors, and thus is expected to be more accurate than a *P-T* model. Since *NP-T* models can be constructed from the measurements on G_i , their construction time is the same as *P-T* models.

$$T_i(N, P)|_{M_i} = \frac{1}{P} \cdot (k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3) + P \cdot (k_4 N^2 + k_5 N + k_6) + k_7 N^2 + k_8 N + k_9 \quad (4)$$

3 Evaluation Methods

In this study, the following four benchmarks are examined on the heterogeneous cluster shown in Table 1. Table 2 summarizes the problem sizes (N) for measurement and evaluation. For each benchmark, *N-T*, *P-T*, and *NP-T* models are constructed and used to estimate the optimal configuration.

HimenoBMT measures the performance to solve Poisson's equation by Jacobi iteration for $N \times N \times N$ domain.

Hpcmw-solver-test is a benchmark for finite element method. $N \times N \times 1$ domain is examined here.

FFTE computes FFT of $N = 2^{23} 3^q 5^r$. In this study, N is fixed to 2^P . Since the process allocation is different when P contains a factor of 3 or 5, *P-T* and *NP-T* models for these cases are constructed separately.

HPL is a linear algebraic system benchmark. HPL is examined here to compare with Kishimoto's results.

Table 1: Evaluation environment

	G_1	G_2
PE	Xeon 2.8 GHz	Celeron M 1.5 GHz
OS	Redhat Linux 9	FedoraCore 3
Compiler, Library	gcc 3.2.2, ifc 8.1, mpich-1.2.6 (Buffer 8KB)	
P_i	$1 \leq P_1 \leq 8$	$0 \leq P_2 \leq 8$
M_i	$1 \leq M_1 \leq 2$	$0 \leq M_2 \leq 1$

Table 2: Measurement sizes (N)

	Measurement	Evaluation
HimenoBMT	32~192 9 sets	32~256 10 sets
hpcmw-solver-test	70 504 7 sets	70~660 20 sets
FFTE	$2^{12} \sim 2^{20}$ 9 sets	$2^{16} \sim 2^{23}$ 8 sets
HPL	400~6400 9 sets	1600~9600 7 sets

4 Evaluation results

Figure 1 summarizes measured execution times of the estimated optimal configurations and the actual optimal configurations for various sizes.

For HPL and hpcmw-solver-test, (sub-)optimal configurations were estimated with *NP-T* models. Though *N-T* and *P-T* models also found (sub-)optimal configurations for interpolated N , their errors increased for extrapolated N , because parameter extraction fails for some cases.

For HimenoBMT, the estimation of *P-T* models and *N-T* models degraded at $N = 160$ and $N = 256$, respectively. *NP-T* models successfully estimated optimal or sub-optimal configurations for HimenoBMT.

For FFTE, the errors of *N-T* and *P-T* models become larger as N increases. *NP-T* models succeeded to estimate optimal or sub-optimal configurations.

In summary; Kishimoto's models degraded on some applications, while *NP-T* models succeeded to find better configuration for more applications.

In this study, a heterogeneous cluster with two kinds of processors was examined. The evaluations with more heterogeneous environment are left for future studies.

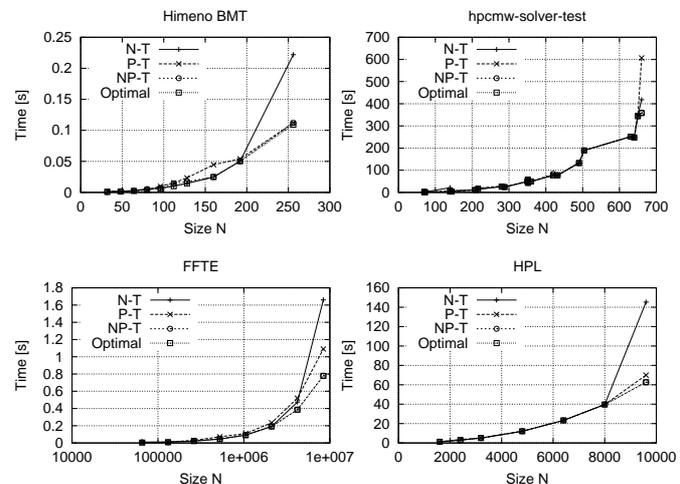


Figure 1: Evaluation results of four benchmarks

References

- [1] Kishimoto, Y. and Ichikawa, S.: Optimizing the Configuration of a Heterogeneous Cluster with Multiprocessing and Execution-Time Estimation, *Parallel Computing*, Vol. 32, No. 7, pp. 691~710 (2005).

目次

1	はじめに	1
1.1	関連研究	1
2	岸本のモデルの各応用での評価	2
2.1	実行時間予測モデル	2
2.2	N-T モデル	2
2.3	P-T モデル	3
2.4	評価環境	3
2.5	測定プログラム	5
2.6	評価結果	9
2.7	考察	12
3	本研究における手法	13
3.1	NP-T モデル	13
3.2	性能グリッチ除去手法	17
3.3	非負制約手法	20
3.4	本研究の手法のまとめ	22
4	プロセッサ 3 種での評価	23
4.1	HimenoBMT	25
4.2	hpcmwsolver-test	26
4.3	FFTE	27
4.4	HPL	27
4.5	考察	28
5	おわりに	29
A.1	測定結果	32
A.2	PC クラスタ構築時の注意点	50
A.2.1	MPICH 通信バッファサイズ	50
A.2.2	NIC	51

A.2.3 サブクラスタ間の接続	51
A.2.4 MTU	53

1 はじめに

不均一クラスタとは、性能が異なる要素プロセッサ (PE) で構築された PC クラスタである。不均一クラスタは、既存のクラスタに高性能なクラスタを追加して増強する場合、余っている PC を寄せ集めてクラスタを構築する場合等、柔軟な構成が可能であるため近年需要が高まっている。それに対し、多くの並列応用は均一クラスタを前提としており、均一な負荷分散を行う。そのため不均一クラスタ上では低速 PE がボトルネックとなり、全体の性能が低下する。不均一クラスタの性能を発揮するには、PE 性能に応じた不均一な負荷分散が必要となる。

不均一な負荷分散の手法の一つとして、低速 PE で単一プロセスを起動し、高速 PE で複数プロセスを起動するマルチプロセス法が挙げられる。岸本ら¹⁾²⁾ は HPL³⁾ (High Performance Linpack) にマルチプロセス法を適用し、実行時間予測モデルを構築してして最適～準最適構成を予測できることを示した。

岸本は対象応用として HPL だけを用いており、マルチプロセス法が広範囲の応用に適用可能であるかは実証されていない。また、岸本の評価ではプロセッサ 2 種類の場合はモデル精度が高いが、プロセッサ 3 種類の場合は精度が低下している。そこで本研究では、岸本の手法が HP L 以外の応用に適用できるか評価を行う事、モデルを改良して予測精度を向上する事を目的とする。

1.1 関連研究

Kalinov⁴⁾ によれば不均一な負荷分散手法は次の 2 つに分類できる。

HoHe 問題領域を PE の性能に応じて不均一に分割し、各 PE に均等にプロセスを割り当てる手法。

HeHo 問題領域を均一に分割し、PE の性能に応じて不均一にプロセスを割り当てる手法。

HoHe 型はプロセス切替オーバーヘッド、通信オーバーヘッドの増加を抑えられるため性能面で有利と言われる。しかし既存の並列応用を HoHe 型で実装するにはプログラムを不均一クラスタ用に書きかえる必要がある。個別応用を不均一クラスタ用に性能チューニングすることは大きな負担である。一方、HeHo 型は通信ライブラリやクラスタミドルウェアの制御で実現できるため、プログラムの書き換え無しに不均一クラスタ上で実行できる。負荷分散の最適化に関しては、HoHe 型で最適なデータ分割を求めることも、HeHo 型で最適なプロセ

分割を求めることも同様に難しい。

HoHe 型の研究例として、笹生ら⁵⁾ は NAS Parallel Benchmark を各 PE へ割り当てるブロック数を変える手法、データ分割の幅を変える手法で実装している。また、大滝ら⁶⁾ は $n \times n$ 行列積の Strassen アルゴリズムを再帰回数を考慮した領域分割を実装している。

HeHo 型の研究例として、岸本と市川¹⁾²⁾ は HPL にマルチプロセス法 (HeHo) を適用し、実測時間から実行時間予測モデルを構築することで、準最適 ~ 最適構成を予測している。

2 岸本のモデルの各応用での評価

この章では、岸本の提案したモデルの概略と評価を述べる。モデルの詳細は文献¹⁾²⁾ に述べられている。

2.1 実行時間予測モデル

応用の問題サイズを N とする。不均一クラスタ内の同性能 PE のグループをサブクラスタ G_i とし、 G_i で計算に使用する PE 台数を P_i とする。 G_i 内の PE には同数のプロセス数 M_i を起動し、形式上 $P_i = 0$ のとき $M_i = 0$ とする。クラスタ内のプロセス総数は $P = \sum_i P_i M_i$ で表される。

不均一クラスタ全体の実行時間 T は、 G_i の実行時間 T_i から、 $\max_i T_i$ で見積もることが出来る。よって、 T_i を N, P, M_i の関数で近似できれば全体の実行時間 T を求める事ができる。この T の近似式を実行時間予測モデルと呼ぶ。

最適構成を予測する手順は

- (1) モデル構築に必要な実測を行う
- (2) モデル式の係数を実測値から最小二乗法で抽出する
- (3) 全構成 (P_i, M_i) についてモデル式から予測実行時間を得る
- (4) 予測実行時間が最短となる構成 (P_i, M_i) を予測最適構成とする

となる。これらは組合せ最適化問題の一種であり、一般には計算困難である。よって大規模な不均一クラスタでは予測が困難となるが、3 章で述べるように本研究の範囲では予測時間は 1 秒未満で済む。そのため本研究では予測時間の削減を今後の課題とし、モデルの予測精度のみを評価する。

2.2 N-T モデル

HPL を例に実行時間予測モデルを構築する。HPL の実行時間 T は r_{fact} , $update$, $uptrsv$ の各フェイズで構成される。 p_{fact} はパネル LU 分解フェイズ、

update は更新フェイズ, *uptrsv* は交代代入処理フェイズの実行時間を表す. 各フェイズの実行時間には通信時間と計算時間の両方が含まれている. 笹生ら⁷⁾によれば, 各フェイズの実行時間オーダーは式 (2), (3), (4) となる. 実行時間 T を P, N の関数とすれば式 (5) が得られる. ある P, M_i について, 式 (5) は式 (6) のように表すことができる. この式を岸本は N-T モデルと名づけた. 式 (6) には未知数 4 つが含まれており, 4 点以上の N について T を測定すれば, 最小二乗法で未知数を決定できる.

$$T = pfact + update + uptrsv \quad (1)$$

$$pfact = \frac{3}{2P} \cdot N^2 + O(N) \quad (2)$$

$$update = \frac{2N^3}{3P} + \frac{P+1}{P} \cdot O(N^2) + O(N) \quad (3)$$

$$uptrsv = \frac{1}{P} \cdot O(N^2) \quad (4)$$

$$T(N, P) = \frac{1}{P} \cdot O(N^3) + P \cdot O(N^2) + O(N^2) \quad (5)$$

$$T_i(N)|_{P, M_i} = k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3 \quad (6)$$

2.3 P-T モデル

N-T モデルで最適予測構成を予測するには, 不均一クラスタの全構成 (P_i, M_i) で測定する必要があり, クラスタ構成が複雑になるとモデル構築時間が膨大になる. そこで, 複数の N-T モデルを統合し, P を含むモデルを構築する. このとき T_i は通信相手に依存せずプロセス総数 P に依存すると, 各サブクラスタの均一構成の測定からモデル構築ができ, モデル構築時間を削減できる.

式 (5) より, T_i に P をパラメータとして追加すると, 式 (7) が得られる. 岸本はこれを P-T モデルと名づけた. 式 (7) は 3 つの未知数を含むため, 3 本以上の N-T モデル式があれば未知数を最小二乗法で決定できる. なお, PE 数が 1 の N-T モデルは PE 間の通信時間を含まないため, PE 数が 2 以上の N-T モデルから P-T モデルを構築する.

$$T_i(N, P)|_{M_i} = \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P, M_i} + k_1 P \cdot T_i(N)|_{P, M_i} + k_2 \quad (7)$$

2.4 評価環境

本研究で用いた不均一クラスタ環境を表 1 に, クラスタ構成 (P_i, M_i) を表 2 に示す. 本研究では単純化のため, 全 PE を 1 台のスイッチ (ワイヤスピードス

イッチ) に接続してネットワークの階層化や帯域制限によるモデルの複雑化を防いでいる。また，実行時間の予測可能性を高めるため，クラスタに付録 A.2 に挙げた調整を行っている。

評価は著名な科学計算用ベンチマークプログラムを対象とし，その中で N と P のパラメータを自由に変更できる HimenoBMT⁸⁾，hpcmw-solver-test⁹⁾，FFTE¹⁰⁾，HPL³⁾ を選択した。各ベンチマークプログラムのバージョン，コンパイルオプションを表 3 に，測定範囲と評価範囲を表 4 に，総測定データ数を表 5 に示す。

表 1 測定環境

	サブクラスタ G_2	サブクラスタ G_3
CPU	Xeon 2.8 GHz	Celeron M 1.5 GHz
OS	Redhat Linux 9	FedoraCore 3
Kernel	2.4.20-8	2.6.12-1.1381_FC3
通信環境	1000BASE-TX	
C コンパイラ	gcc 3.2.2	
Fortran コンパイラ	Intel Fortran Compiler 8.1	
通信ライブラリ	mpich-1.2.6 (バッファサイズ 8KB)	

表 2 不均一環境の構成

	G_2	G_3	総組合せ数
プロセッサ 2 種	$1 \leq P_2 \leq 8$ $0 \leq M_2 \leq 2$	$0 \leq P_3 \leq 8$ $0 \leq M_3 \leq 1$	144

表 3 測定アプリケーションの条件

ソフトウェア名	バージョン	コンパイルオプション
HimenoBMT	HimenoBMTxp C + MPI static allocate version	-O2
hpcmw-solver-test	1.00	-O
FFTE	4.0	-O3 -fomit-frame-pointer
HPL	1.0a	-O3 -funroll-loops -fomit-frame-pointer

2.5 測定プログラム

2.5.1 HimenoBMT

HimenoBMT は Poisson 方程式を Jacobi 反復法で解く場合の主要ループの処理速度を測定するベンチマークプログラムである。配布ファイルでは問題サイズが固定されているため，ヘッダファイルを書き換えて任意の $N \times N \times N$ を

表4 測定・評価範囲

	問題サイズ N	
	測定範囲	評価範囲
HimenoBMT	32 ~ 192 9 点	32 ~ 256 10 点
hpcmw-solver-test	70 ~ 504 7 点	70 ~ 660 20 点
FFTE	$2^{12} \sim 2^{20}$ 9 点	$2^{16} \sim 2^{23}$ 8 点
HPL	400 ~ 6400 9 点	1600 ~ 9600 7 点

表5 総測定データ数

	測定データ数	
	N-T	P-T
HimenoBMT	1296	315
hpcmw-solver-test	1008	245
FFTE	252	135
HPL	1296	315

計算している。

ソースコードより，HimenoBMT の処理は 3 つに分類され，各処理にかかる時間を $calc$ ， $sendrecv$ ， $allreduce$ とする。 $calc$ はヤコビ反復法の計算時間， $sendrecv$ は隣接領域との通信時間， $allreduce$ は誤差値を集計する通信時間である。

ソースコードの解析から， $calc$ は $\frac{34 \cdot N^3}{P}$ 回の計算時間であり， $\frac{1}{P} \cdot O(N^3)$ で抑えられる。 $sendrecv$ は隣接プロセス間のサイズ N^2 の通信時間である。通信対象は隣接領域に限られるので $sendrecv$ は $O(N^2)$ で抑えられる。 $allreduce$ は単精度 1 要素を MPI_All reduce 命令で和を取る通信時間であり，本研究の環境では $\log P \cdot O(1)$ で抑えられる。

以上の調査から，実行時間 T を P と N の関数で表せば式 (8) が得られる。式 (8) から構築した N-T モデルを式 (9)，P-T モデルを式 (10) に示す。

$$\begin{aligned}
T &= calc + sendrecv + allreduce \\
calc &= \frac{1}{P} \cdot O(N^3) \\
sendrecv &= O(N^2) \\
allreduce &= \log P \cdot O(1) \\
T &= \frac{1}{P} \cdot O(N^3) + O(N^2) + \log P \cdot O(1) \tag{8} \\
T_i(N)|_{P,M_i} &= k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3 \tag{9} \\
T_i(N, P)|_{M_i} &= \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P,M_i} + k_1 \log P + k_2 \tag{10}
\end{aligned}$$

2.5.2 hpcmw-solver-test

hpcmw-solver-test は有限要素法による 3 次元弾性解析を対象として開発されたベンチマークプログラムである。hpcmw-solver-test は 3 種類のハードウェア向けに実装されており、本研究ではスカラプロセッサ、分散メモリ型用のプログラム（配布ファイル内 src/scalar/ の linux 用プロファイル）を利用している。制御方法はベンチマークの標準設定に従う（反復法 CG 法，前処理手法 BILU 法，Additive Schwartz Domain Decomposition の繰返し数 2，オーダリング手法 CM/RCM 法，反復回数 5000 回）。

hpcmw-solver-test は本来、3 次元 $N \times N \times N$ の問題を扱うが、本研究では主記憶容量・実行時間の都合により $N \times N \times 1$ の 2 次元の問題を扱う。また、問題サイズ N はプロセス総数 P で割り切れる必要があるため、今回は k 番目の問題サイズ $N_k = P \lceil \frac{70k}{P} \rceil$ と定める。

マニュアルより、hpcmw-solver-test の処理は 5 つに分類され、各処理にかかる時間を $vproduct$ 、 $vdot$ 、 $vaddsub$ 、 $sendrecv$ 、 $allreduce$ とする。 $vproduct$ は行列ベクトル積の計算時間、 $vdot$ はベクトル内積の計算時間、 $vaddsub$ はベクトル加減算の計算時間である。 $sendrecv$ は隣接領域との通信時間、 $allreduce$ はスカラ値集計の通信時間である。

ソースコードの解析から、 $vproduct$ は 3×3 の行列と長さ 3 のベクトルの積を $\frac{N^3}{P}$ 回行っており、 $\frac{1}{P} \cdot O(N^3)$ で抑えられる。 $vdot$ は $\frac{N^2}{P}$ 個の長さ 3 のベクトル内積に要する計算時間であり、 $\frac{1}{P} \cdot O(N^2)$ で抑えられる。 $vaddsub$ は $\frac{N^2}{P}$ 要素の加減算に要する計算時間であり、 $\frac{1}{P} \cdot O(N^2)$ で抑えられる。 $sendrecv$ は隣接プロセス間の要素数 $\frac{N^2}{P}$ の通信時間である。通信相手は隣接領域に限られるので $O(N^2)$ で抑えられる。 $allreduce$ は倍精度 1 要素を MPIAllreduce 命令で和を取る通信時間である。HimenoBMT と同様に本研究の構成では $\log P \cdot O(1)$

で抑えられる．

以上の調査から，実行時間 T を P と N の関数で表せば式 (11) が得られる．式 (11) より構築した N-T モデルを式 (12)，P-T モデルを式 (13) に示す．

今回の評価環境では *allreduce* は 50ms 程度であり全体の実行時間に比べて無視できる量である．ところが実際に係数を抽出すると現実離れした係数が抽出され，モデルの予測誤差が大きくなる場合がある．そのため，本章以降での評価で示すとおり，最初から *allreduce* を省略したモデル式の方が精度が高い．このときの P-T モデルは式 (14) となる．

$$\begin{aligned}
 T &= vproduct + vdot + vaddsub + sendrecv + allreduce \\
 vproduct &= \frac{1}{P} \cdot O(N^3) \\
 vdot &= \frac{1}{P} \cdot O(N^2) \\
 vaddsub &= \frac{1}{P} \cdot O(N^2) \\
 sendrecv &= O(N^2) \\
 allreduce &= \log P \cdot O(1) \\
 T &= \frac{1}{P} \cdot O(N^3) + O(N^2) + \log P \cdot O(1) \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$T_i(N)|_{P, Mi} = k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3 \tag{12}$$

$$T_i(N, P)|_{Mi} = \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P, Mi} + k_1 + k_2 \log P \tag{13}$$

$$\approx \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P, Mi} + k_1 \tag{14}$$

2.5.3 FFTE

FFTE は $2^p 3^q 5^r$ 要素の 1 次元 / 2 次元 / 3 次元複素離散フーリエ変換を計算するライブラリである．本研究の測定には，FFTE 4.0 に同梱されている 1 次元複素 FFT のテストプログラム を用いている．また， N は P^2 で割り切れる必要がある（ただし $N \geq P^2$ ）．よって N と P は 2 のべき乗に限定する．

FFTE の処理は 4 つに分類され，各処理に要する時間 *factor*，*table*，*fft*，*comm* とする．*factor* はサイズ N の 1 次元配列を $N_x \times N_y \times N_z$ に分割する時間であり， $O(N)$ で抑えられる．*table* は N_x, N_y, N_z 個の三角関数テーブルを作成する時間であり， $O(N^{\frac{1}{3}})$ で抑えられる．*fft* は FFT の計算時間であり P プロセスで並列化されており， $\frac{1}{P} \cdot O(N \log N)$ で抑えられる．*comm* は Alltoall 通信

配布ファイル内 mpi/tests/pspeed1d.f

時間である．本研究の環境では Alltoall の通信時間は P と 1 ノードあたりの通信サイズに比例する．1 ノードあたり通信量は $\frac{N}{P^2}$ とソースコードに記述されており，これにヘッダー情報量 H が加わると考えられる．よって $comm$ は式 (16) となる．なお Alltoall の通信時間は MPI ライブラリの実装，ネットワーク構成等によって通信コストは異なる．

以上の調査より，実行時間 T を P, N で表すと式 (17) が得られる．式 (17) より構築した N-T モデルを式 (18)，P-T モデルを式 (19) に示す．

一般にクラスタ環境では Alltoall 通信時間は通信コストが高い¹¹⁾．よって，他ベンチマークに比べ，FFTE は通信時間の占める割合が高くなる．通信時間が多い応用例として FFTE を評価に加えている．

$$T = factor + table + fft + comm \quad (15)$$

$$factor = O(N)$$

$$table = O(N^{\frac{1}{3}})$$

$$fft = \frac{1}{P} \cdot O(N \log N)$$

$$\begin{aligned} comm &= k \cdot \left(\frac{N}{P^2} + H \right) P \\ &= k \cdot \frac{N}{P} + k \cdot H \cdot P \\ &= \frac{1}{P} \cdot O(N) + P \cdot O(1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$T = \frac{1}{P} \cdot O(N \log N) + P \cdot O(1) + O(N) + O(N^{\frac{1}{3}}) \quad (17)$$

$$T_i(N)|_{P, Mi} = k_0 N \log N + k_1 N + k_2 N^{\frac{1}{3}} + k_3 \quad (18)$$

$$T_i(N, P)|_{Mi} = \frac{k_0}{P} \cdot T_i(N)|_{P, Mi} + k_1 P \cdot T_i(N)|_{P, Mi} + k_2 \quad (19)$$

2.5.4 HPL

HPL は LU 分解による連立一次方程式の解法時間を測定するベンチマークプログラムである．HPL は岸本が既にモデル構築，評価をしているが，今回は評価環境が変わっているため，追試として HPL の測定を行なう．計算ライブラリとして ATLAS 3.6.0 を利用し，プロセス格子は 1 列に限定した 1 次元ブロックサイクリック分割としている．

岸本に倣い，HPL の N-T，P-T モデル式はそれぞれ，式 (6)，式 (7) とする．

2.6 評価結果

各ベンチマークで N-T, P-T モデルを構築して最適構成 (P_i, M_i) を予測する。また、可能な全ての構成 (P_i, M_i) で測定を行い、実測実行時間が最短となる構成 (P_i, M_i) を得る。以後、予測による最適構成を予測最適構成、実測実行時間が最短となる構成を実測最適構成と呼び、予測最適構成の実測実行時間を $\hat{\tau}$ 、実測最適構成の実測実行時間を実測最短時間 \hat{T} とする。

評価は $\hat{\tau}, \hat{T}$ 間の誤差 $\frac{\hat{\tau}-\hat{T}}{\hat{T}}$ で行う。最適構成を予測できた場合に誤差は 0% となる。また、岸本に倣い誤差が 20% 未満に収まる構成を準最適構成と呼ぶ。なお、 N が小さい範囲は相対誤差が大きくとも実時間にして数秒程度であるため、 N が大きい範囲に注目して評価する。

ページ数の都合により、実測結果の表は付録 A.1 にまとめて記載し、本章以降の本文には誤差と実行時間の図を記載する。

2.6.1 HimenoBMT

HimenoBMT の実測結果を表 20, 表 21 に示す。図 1 より、N-T モデルは内挿範囲の $96 \leq N \leq 192$ で誤差は 17% 以下と準最適構成を予測できたが、外挿範囲の $N = 256$ で誤差が 100% を超えている。P-T モデルは $48 \leq N \leq 80, 192 \leq N \leq 256$ で誤差が 20% 以下となったが、 $N = 32, 96, 112, 128, 160$ では誤差が 50% を超えている。

図 2 より、N-T, P-T モデルはどちらも実測最短時間を示す “Optimal” から外れている。HimenoBMT に N-T, P-T モデルを適用しても精度は悪い。

N-T モデルで予測に失敗する原因は、予測実行時間が負になる構成を選択することが原因である。例として、図 3 に $(P_2, M_2, P_3, M_3) = (2, 1, 8, 1)$ の測定結果から N-T モデルを構築した場合を示す。3 次の係数が負となるために、予測実行時間が負となっている。

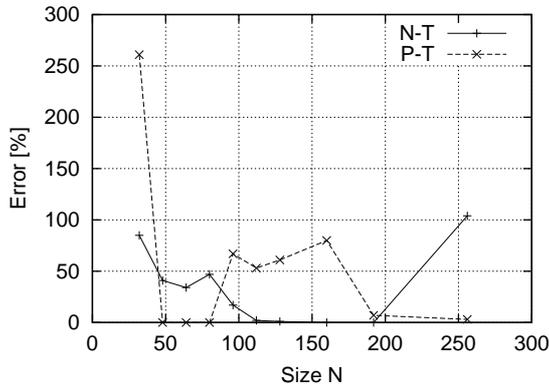


図 1 HimenoBMT 誤差

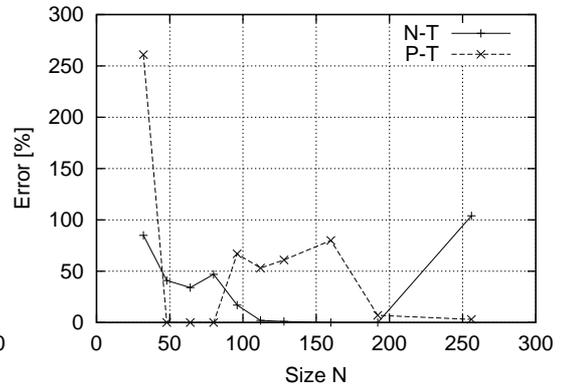


図 2 HimenoBMT 実測実行時間

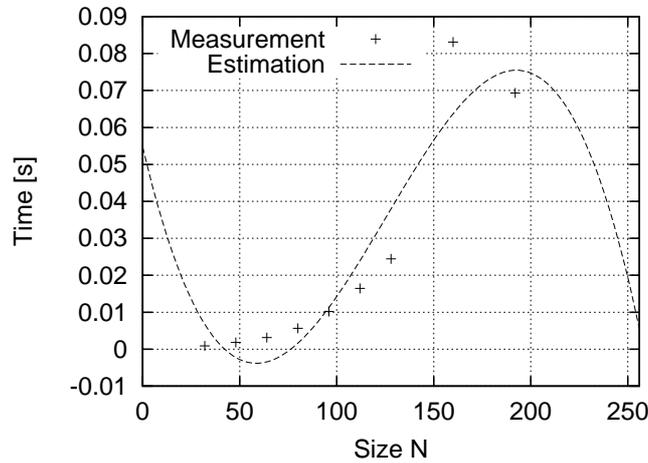


図 3 HimenoBMT N-T モデル破綻の例

2.6.2 hpcmw-solver-test

hpcmw-solver-test の実測結果を表 22，表 23，表 24 に示す。

図 4 より，N-T モデルは内挿範囲の $210 \leq N \leq 504$ で誤差が 1%以下，外挿範囲の $630 \leq N \leq 660$ で誤差が 17%以下である． $\log P$ を含む P-T モデルは $280 \leq N \leq 660$ で誤差は最大 1%となっている． $\log P$ を含まない P-T モデルも $280 \leq N \leq 650$ で誤差は 1%以下だが， $N = 660$ で誤差 70%と大きくなる． $70 \leq N \leq 210$ では $\log P$ を含まない P-T モデルは， $\log P$ を含む P-T モデルより誤差が小さい．

図 5 で N-T モデル， $\log P$ を含む P-T モデルの予測最適構成は実測最短時間とほぼ一致している． $\log P$ を含まない P-T モデルも $280 \leq N \leq 650$ では実測最短時間とほぼ一致しており，外挿の $N = 660$ で実測最短時間から外れている

ことがわかる。

以上より，N-T モデル， \log を含む P-T モデルは内挿，外挿範囲で十分実用的と言える． $\log P$ を含まない P-T モデルも内挿範囲で十分な精度がでている．

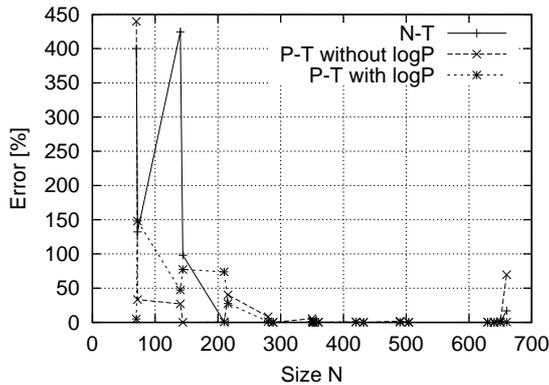


図4 hpcmw-solver-test 誤差

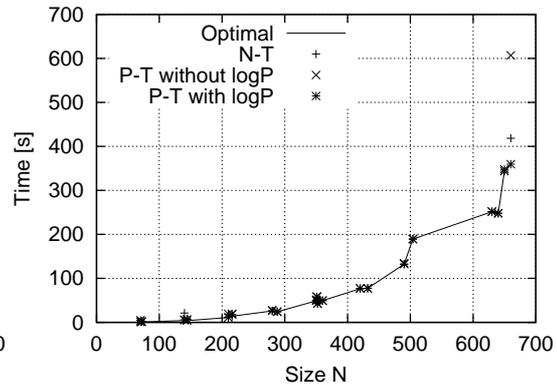


図5 hpcmw-solver-test 実測実行時間

2.6.3 FFTE

FFTE の実測結果を表 25，表 26 に示す。

図 6 より N-T，P-T モデルはどちらも誤差が 200%を超えており予測精度は低い。

図 7 より N-T，P-T モデルの予測最適構成の実測実行時間はどちらも実測最短時間を示す “Optimal” から外れていることがわかる。以上の評価から FFTE では N-T，P-T モデルの精度は悪い。

表 5 で示したように FFTE は測定数が少ないために，フィッティングの精度が低下して予測精度が低下していると考えられる。

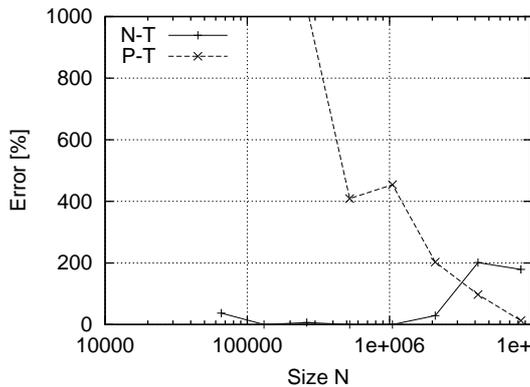


図6 FFTE 誤差

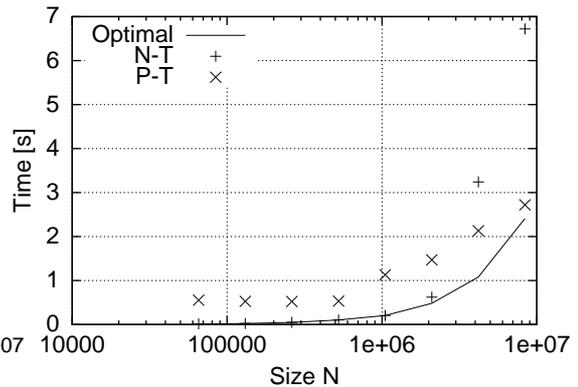


図7 FFTE 実測実行時間

2.6.4 HPL

HPL の実測結果を表 27, 表 28 に示す .

図 8 より, N-T モデルは内挿範囲の $1600 \leq N \leq 6400$ 及び外挿範囲の $N = 8000$ で誤差 0%となった . しかし $N = 9600$ では誤差が 132%と大きく, この原因は 3 次の項の係数が負となる構成を選択したためである . 一方, P-T モデルでは $3200 \leq N \leq 9600$ で誤差は 12%以下に抑えられている .

図 9 では, N-T モデルは $N = 9600$ で実測最短時間を示す “Optimal” から大きく外れている . それ以外で N-T モデル, P-T モデルの予測最適構成の実測実行時間はほぼ実測最短時間と一致している ,

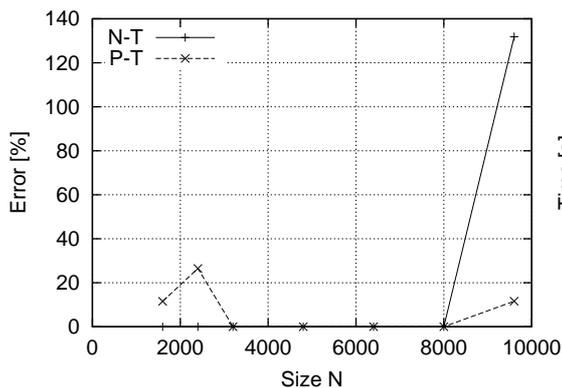


図8 HPL 誤差

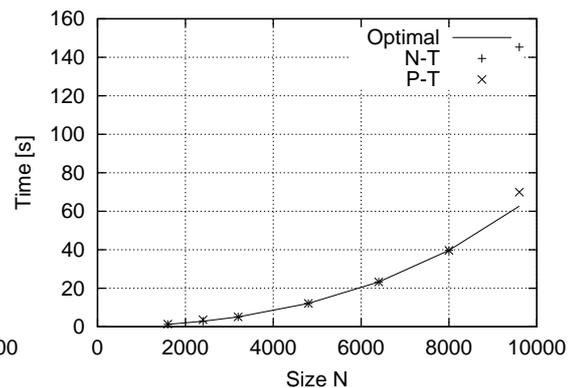


図9 HPL 実測実行時間

2.7 考察

以上の測定より，HPL は岸本の研究とほぼ同様に準最適～最適構成を予測できた．hpcmw-solver-test においても，N-T，P-T 両モデルで準最適～最適構成を予測できた．この2つの応用は3.2節で述べる性能グリッチが少ないため，フィッティング失敗による精度低下が発生しないことが原因と考えられる．

しかし HimenoBMT，FFTE では誤差が大きく予測に失敗した．HimenoBMT は性能グリッチが多く発生したため，フィッティングの失敗により誤差が大きくなったと考えられる．

3 本研究における手法

3.1 NP-T モデル

岸本はN-T モデルを統合し，P-T モデルを提案した．P-T モデルはN-T モデルを統合するための経験的モデルと言える．本研究では，実行時間 T_i を N, P をパラメータとして直接導きだした NP-T モデルを提案する．

HPL を例に NP-T モデルを構築する．HPL の実行時間は式 (20) であり， T_i を N, P の関数とすれば式 (21) が得られる．式 (21) を NP-T モデルとする．NP-T モデルは係数が多く，正確なモデル化が可能と考えられるが，逆にフィッティングに失敗する可能性もあり検証が必要となる．

NP-T モデルでも P-T モデルと同様に通信時間は通信相手には依存せず，プロセス数 P に依存すると仮定する．また，PE 台数が 1 台の実行時間には，通信時間が含まれないため，モデル構築には使用しない．よって，P-T モデルと同様に各サブクラスタ均一構成の測定からモデルを構築できるため，N-T モデルに比べて構築時間を削減できる．N-T，P-T，NP-T 各モデルの構築に要した時間を表 6，表 7，表 8 に示す．測定時間はモデル構築に必要なデータを得るための時間，抽出時間は最小二乗法でパラメータを抽出する時間，予測時間は全構成 (P_i, M_i) にパラメータを代入して実行時間を予測し最短となる構成を探索する時間である．NP-T モデルが P-T モデルと同等の構築時間であることがわかる．総測定データ数を表 9 に示す．

NP-T モデルのフィッティング用データ数は N の測定数 $\times (PE-1)$ である．これは N-T，P-T モデルに比べて多いため，P-T モデルが構築できない場合でも NP-T モデルは構築が可能な場合がある．例えば，HPL の P-T モデルでは $2 \leq P_i$ の N-T モデルが最低 3 本必要となるため，4 PE 以上のサブクラスタでな

ければ P-T モデルは構築できない．しかし NP-T モデルは PE 数が 3 でも， N の測定数 \times (PE-1) \geq 総係数，となるためモデル構築が可能である．

HPL 以外のベンチマークプログラムについても NP-T モデルを構築した．Hi-menoBMT の NP-T モデルは式 (8) より式 (22) となる．同様に hpcmw-solver-test の NP-T モデルを式 (23)，式 (24)，FFTE の NP-T モデルを式 (25) に示す．hpcmw-solver-test は $\log P$ の項を省略するモデルと，省略しないモデルで評価を行う．

$$T(N, P) = \frac{1}{P} \cdot O(N^3) + P \cdot O(N^2) + O(N^2) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} T_i(N, P)|_{Mi} &= \frac{1}{P} \cdot (k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3) \\ &\quad + P \cdot (k_4 N^2 + k_5 N + k_6) + k_7 N^2 + k_8 N + k_9 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} T_i(N, P)|_{Mi} &= \frac{1}{P} \cdot (k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3) + k_4 N^2 \\ &\quad + k_5 N + k_6 \log P + k_7 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_i(N, P)|_{Mi} &= \frac{1}{P} \cdot (k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3) + k_4 N^2 \\ &\quad + k_5 N + k_6 + k_7 \log P \end{aligned} \quad (23)$$

$$\approx \frac{1}{P} \cdot (k_0 N^3 + k_1 N^2 + k_2 N + k_3) + k_4 N^2 + k_5 N + k_6 \quad (24)$$

$$T_i(N, P)|_{Mi} = \frac{1}{P} (k_0 N \log N + k_1 N + k_2) + k_3 P + k_4 N + k_5 N^{\frac{1}{3}} + k_6 \quad (25)$$

表 6 N-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	4.4×10^1	8.0×10^{-1}	4.6×10^{-2}	4.5×10^1
hpcmw-solver-test	1.1×10^5	2.9×10^0	3.0×10^{-2}	1.1×10^5
HPL	1.4×10^4	1.9×10^0	1.0×10^{-2}	1.4×10^4
FFTE	3.7×10^1	1.2×10^{-1}	1.0×10^{-2}	3.7×10^1

表 7 P-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	9.5×10^0	4.2×10^0	1.0×10^{-2}	1.4×10^1
hpcmw-solver-test	1.8×10^4	1.5×10^0	2.0×10^{-2}	1.8×10^4
HPL	2.9×10^3	2.0×10^0	5.0×10^{-2}	2.9×10^3
FFTE	1.8×10^1	1.0×10^0	2.0×10^{-2}	1.9×10^1

表 8 NP-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	9.5×10^0	1.6×10^0	1.0×10^{-2}	1.1×10^1
hpcmw-solver-test	1.8×10^4	6.3×10^{-1}	2.0×10^{-2}	1.8×10^4
HPL	2.9×10^3	5.8×10^{-1}	1.0×10^{-2}	2.9×10^3
FFTE	1.8×10^1	4.9×10^{-1}	1.0×10^{-2}	1.8×10^1

表 9 総測定データ数

	測定データ数		
	N-T	P-T	NP-T
HimenoBMT	1296	315	315
hpcmw-solver-test	1008	245	245
FFTE	252	135	135
HPL	1296	315	315

3.1.1 評価結果

評価環境は 2 章と同じく、表 1 のプロセッサ 2 種類の不均一クラスタを用いる。評価対象には HimenoBMT, hpcmw-solver-test, FFTE, HPL を用いる。NP-T モデルの精度を検証するため、N-T, P-T モデルと比較を行う。

HimenoBMT の実測結果を表 29 に示す。図 10 より、NP-T モデルは $128 \leq N \leq 256$ で誤差 20%以下となっている。NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は図 11 より、実測最短時間を示す“Optimal”とほぼ一致しており準最適～最適な構成を予測できた。N-T, P-T モデルは予測に失敗しているため、両モデル比べて高精度と言える。

hpcmw-solver-test の実測結果を表 30, 表 31 に示す。図 12 より NP-T モデル

は, $\log P$ を含むモデル, 含まないモデルで共に $216 \leq N \leq 660$ では誤差は9%以下となった. また, $70 \leq N \leq 216$ では $\log P$ を含まない NP-T モデルの方が誤差が小さい. 図 13 より, NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” とほぼ一致しており, N-T, P-T モデルと同じく準最適 ~ 最適な構成を予測できた.

FFTE の実測結果を表 32 に示す. 図 14 より, NP-T モデルは誤差が 200% を超えている. 図 15 において NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” から外れており予測に失敗している. 表 9 に示すように FFTE では測定データ数が少ないためにフィッティングの精度が低下していると考えられる.

HPL の実測結果を表 33 に示す. 図 16 より, NP-T モデルは $1600 \leq N \leq 9600$ で誤差が 12% 以下となった. 図 17 で, NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は最短実行時間を示す “Optimal” とほぼ一致しており, NP-T モデルは N-T, P-T モデルと同じく準最適 ~ 最適構成を予測できた.

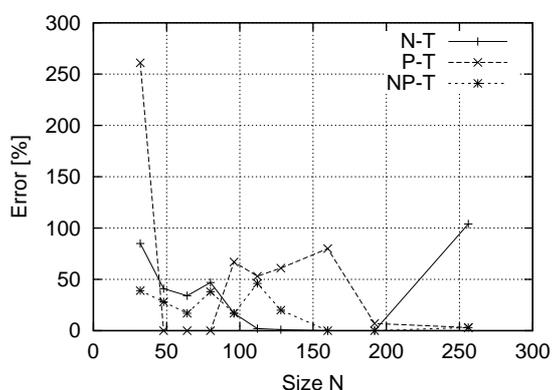


図 10 HimenoBMT 誤差

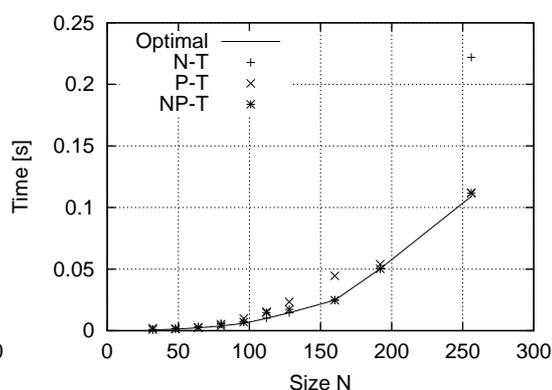


図 11 HimenoBMT 実測実行時間

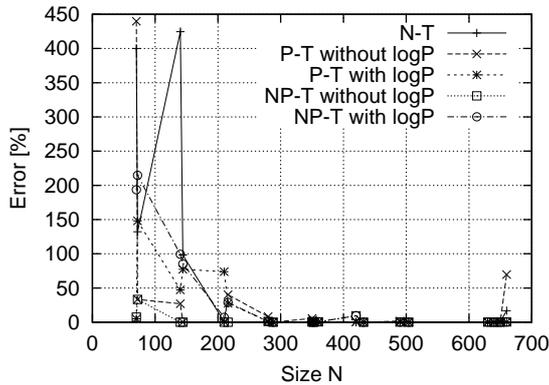


図 12 hpcmw-solver-test 誤差

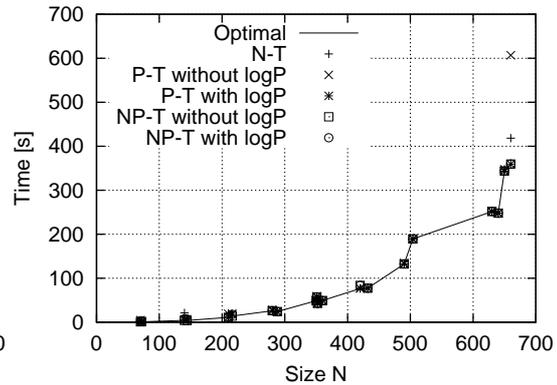


図 13 hpcmw-solver-test 実測実行時間

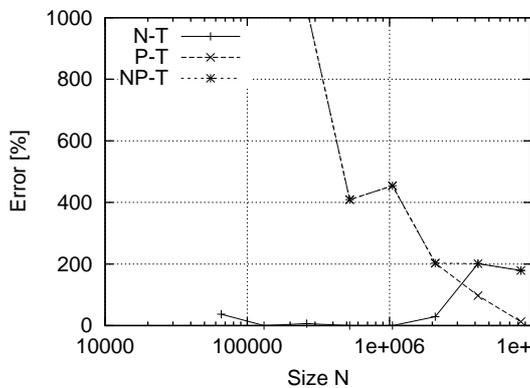


図 14 FFTE 各モデルの誤差

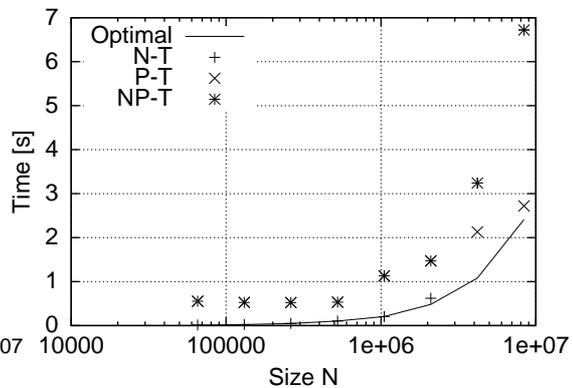


図 15 FFTE 実測実行時間

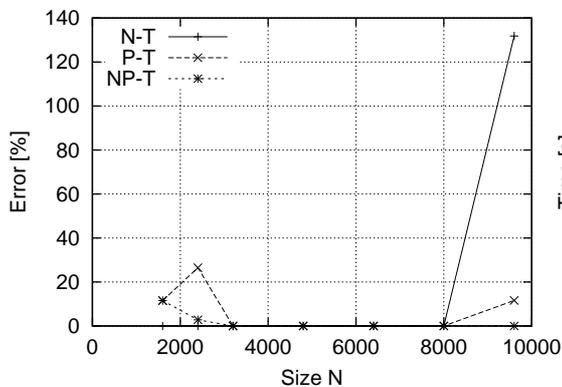


図 16 HPL 誤差

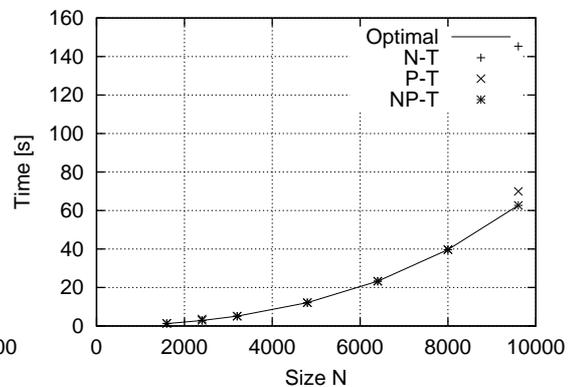


図 17 HPL 実測実行時間

3.1.2 考察

HimenoBMT で NP-T モデルは P-T モデルに比べて高精度であった。これは、NP-T モデルのフィッティングに用いるデータ数が N の測定数 \times (PE 台数-1) と N-T, P-T モデルより多いために、3.2 節で述べる性能グリッチが少数含まれていてもパラメータが負になりにくいことが原因と考えられる。

3.2 性能グリッチ除去手法

一般に計算時間の N の次数が通信時間より高い場合, N が増加につれ性能が向上することが期待できる (図 18). しかし実測すると, 特定の組合せ (P_i, M_i, N) において性能が低下する場合がある. 図 19 は HimenoBMT における実例で, $N = 192$ で性能が低下している. このような性能が低下する点を性能グリッチと呼ぶ. 性能グリッチの原因としてキャッシュのスラッシング, メモリのバンク衝突等が挙げられる.

グリッチを含む図 19 の測定値から N-T モデルを構築すると図 20 に示すように $N = 256$ での精度が低下する. また, P-T モデルは N-T モデルから構築するため, N-T モデルが破綻していれば P-T モデルの精度も低下することは明らかである. NP-T モデルも性能グリッチを含んだまま構築すれば精度の低下は免れない. ただし, NP-T モデルではフィッティング用のデータ数が多いため, グリッチが少なければ影響を無視できる可能性がある.

グリッチを除去して N-T モデルを構築することで図 21 のように精度の高いモデルが得られる. 実際には性能グリッチの原因を考慮したモデルの構築が望ましいが, ソースコードを入手できない場合は性能グリッチの原因を解明できない可能性がある. そのような場合でもグリッチの削除は容易に実現できる. この節では, 単純に性能グリッチを削除することでモデル精度を向上できるか検討を行う.

グリッチを削除して N-T モデルを構築する場合は, 各構成の測定値に含まれるグリッチを削除してモデル式に対しフィッティングを行う. $\exists N$ の性能が N 未満の性能 $\times k$ 以下に低下した場合, 性能グリッチと判定する. グリッチが多い構成 (P_i, M_i) は, データ数が減少しフィッティングの精度が低下する場合がある. よってグリッチ許容数を設定し, グリッチ数が許容数を超えた N-T モデルの構築は行わないこととする. これにより, N-T モデルを構築できる構成 (P_i, M_i) が減少する. グリッチを削除した場合の N-T モデル構築数を表 10 に示す.

P-T モデルはグリッチを削除した N-T モデルから構築を行う. P-T モデルの係数より N-T モデルの本数が少ない場合には P-T モデルを構築できないため評価から除外する.

NP-T モデルの場合, P を固定して, $\exists N$ の性能が N 未満の性能 $\times k$ 以下に低下した場合, 性能グリッチと判定する. P の変化による性能グリッチも存在すると考えられるが, P の増加によって性能が向上するとは限らないため, 今回

は N についてのみ性能グリッチの判定を行う。NP-T モデルでは全ての性能グリッチを除去した後にモデル式のフィッティングを行う。N-T, P-T モデルに比べてフィッティング用のデータ数が多いため全ての性能グリッチを削除しても十分なデータ数が残ると考えられるためである。

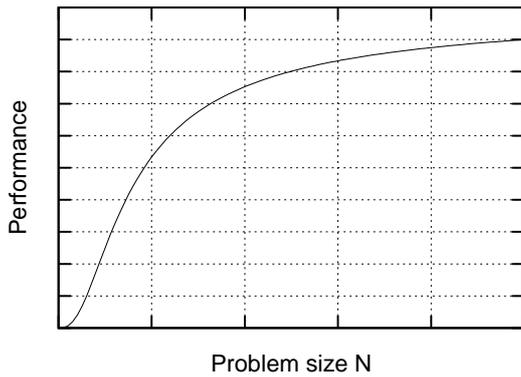


図 18 HimenoBMT 期待される性能

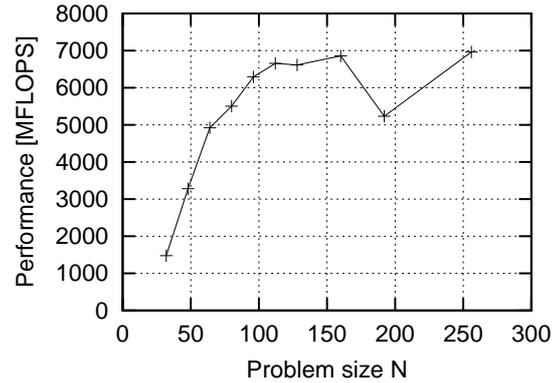


図 19 HimenoBMT 実測性能

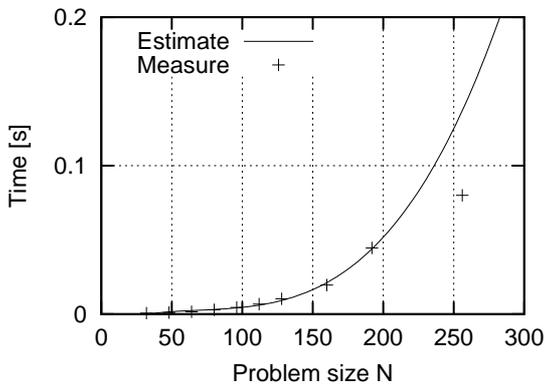


図 20 グリッチを含む N-T モデル

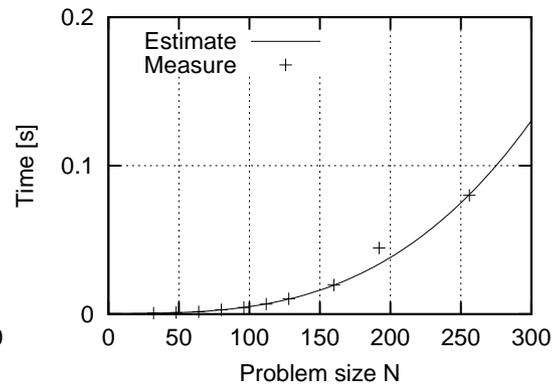


図 21 グリッチを削除した N-T モデル

	全 N-T モデル数	構築可能な N-T モデル数	
		許容数 0	許容数 1
HimenoBMT	144	92	130
hpcmw-solver-test	144	133	138
HPL	144	135	144
FFTE	144	93	120

表 10 削除手法適用後の構築モデル数 ($k=0.8$ の場合)

3.2.1 評価結果

評価は表1のクラスタを用いる．hpcmw-solver-test, HPLはグリッチが少なく,グリッチを除去せずとも高精度であるため評価から除外する．HimenoBMT, FFTEの測定値からグリッチを除去し, N-T, P-T, NP-Tモデルを構築し評価を行った．なお,グリッチの判定は $k = 0.8$ で行っている．

HimenoBMTの実測結果を表34,表35,表36に示す．グリッチを削除したN-Tモデル(許容数0,1)とNP-Tモデルの誤差を図22に示す．グリッチの削除によりN-Tモデルが不足し,P-Tモデルは構築できなかった．グリッチ許容数0のN-Tモデルは $80 \leq N \leq 256$ で誤差は3%以下で,グリッチ除去前に比べ誤差が減少していることがわかる．また, NP-Tモデルは全ての N で誤差が17%以下となった．図23より,グリッチを削除したN-Tモデル(許容数0)とグリッチを削除したNP-Tモデルで準最適~最適な構成を予測できた．

FFTEの実測結果を表37,表38,表39に示す．グリッチを削除したN-Tモデル(許容数0,1)とNP-Tモデルの誤差を図24に示す．グリッチ除去によりN-Tモデルが不足するためP-Tモデルは構築できなかった．グリッチを削除したN-Tモデルは誤差が9%以下と精度が向上した．NP-Tモデルではグリッチを削除しても誤差は減少していない．図25より,グリッチを削除したN-Tモデル(許容数0,1)の予測最適構成の実測実行時間が実測最短時間を示す“Optimal”とほぼ一致しており,準最適~最適な構成を予測できた．

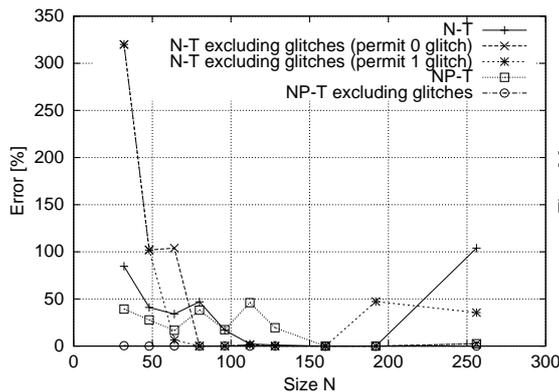


図22 HimenoBMT 誤差

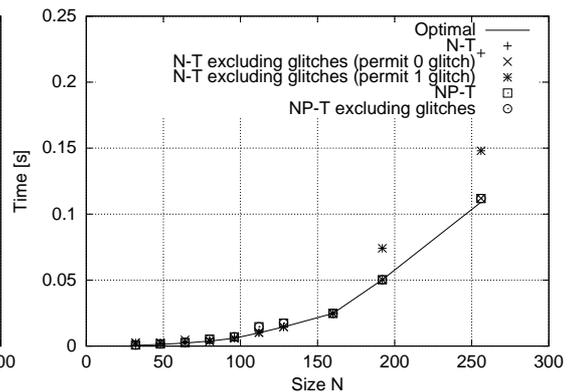


図23 HimenoBMT 実測実行時間

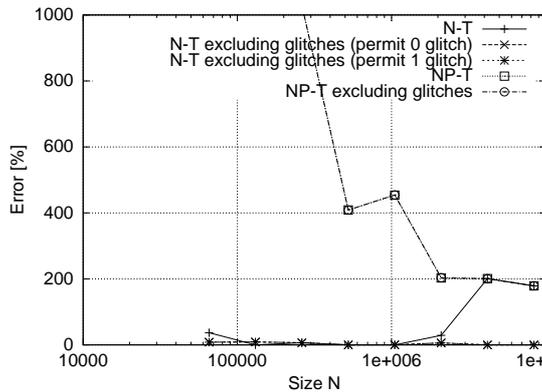


図 24 FFTE 誤差

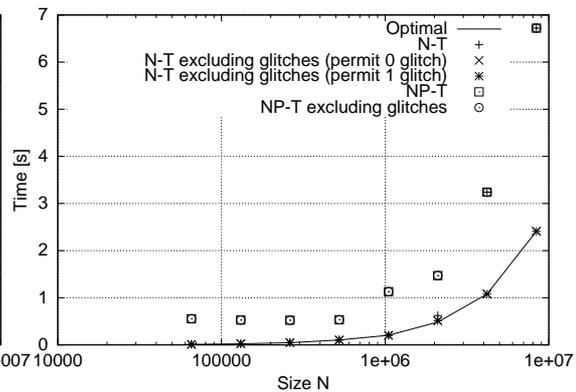


図 25 FFTE 実測実行時間

3.2.2 考察

性能グリッチの削除により，N-T モデルの精度向上が確認できた．しかし，グリッチが多い応用では，P-T モデルを構築できないという欠点がある．大規模なクラスタでは N-T モデルは構築時間が膨大であるから N-T，P-T モデルでの性能グリッチ除去は効果が無い．

一方，NP-T モデルはグリッチを除去しても十分なフィッティング用データが維持できる．P-T モデルは性能グリッチの影響で構築が困難なことを考えると，グリッチ削除手法は NP-T モデルへの適用が最も効果的と考えられる．

3.3 非負制約手法

実行時間予測モデルの構築には，最小二乗法による関数フィッティングを用いる．各係数は正となることが期待されるが，フィッティングの結果，係数が負となる可能性がある． N が高次の係数が負の場合は N の増加につれ，実行時間が負となる．そこで最も N の次数が高い項の係数が負の N-T モデルを除いて予測を行う．以降これを非負制約モデルと呼ぶ．グリッチ除去手法と同様に，非負制約手法による N-T モデルの構築数を表 11 に示す．P-T モデルは，最も高次の係数が正の N-T モデルのみから構築し，P-T モデルの係数より N-T モデルの本数が少ない場合には評価を行わない．NP-T モデルは N が高次の項を複数含み，判定が困難であるため非負制約手法は適用しない．

3.3.1 評価結果

評価は表 1 の環境を用いる．hpcmw-solver-test では非負制約手法を適用せず準最適～最適な構成を予測できていたため，評価から除外している．

HimenoBMT の実測結果を表 40，表 41 に示す．図 26 より，非負制約の N-T モ

	構築可能な N-T モデル数	
	全 N-T モデル数	非負制約モデル
HimenoBMT	144	134
hpcmwsolver-test	144	126
HPL	144	119
FFTE	144	52

表 11 非負制約モデルの構築モデル数

デルは $96 \leq N \leq 256$ で誤差は 3% 以下, 非負制約の P-T モデルは $80 \leq N \leq 160$ で誤差は 60% 以上となった. 図 27 より, 非負制約の N-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” とほぼ一致しており, 準最適 ~ 最適構成を予測できた.

FFTE の実測結果を表 42 に示す. 非負制約の P-T モデルは, N-T モデルが不足したために構築できなかった. 図 28 より, 非負制約の N-T モデルは全ての N で誤差 10% 以下となった. 図 29 より, 非負制約の N-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” とほぼ一致しており準最適 ~ 最適構成を予測できた.

HPL の実測結果を表 43 に示す. 図 30, 31 より, 非負制約の N-T モデルは全ての N が 0% となり最適な構成を予測できた. なお P-T モデルは N-T モデルが不足したため構築できなかった.

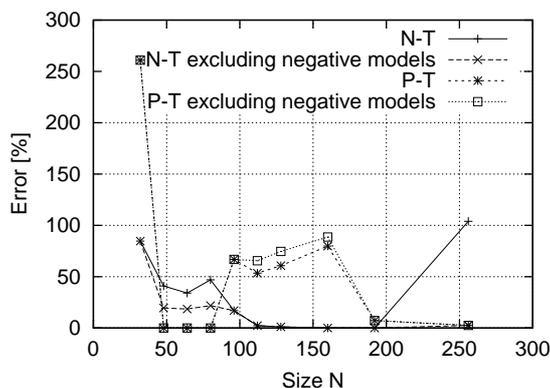


図 26 HimenoBMT 誤差

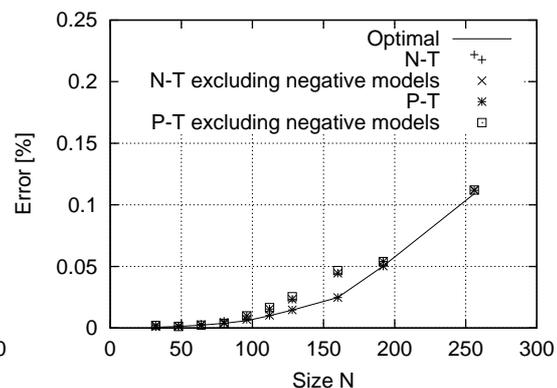


図 27 HimenoBMT 実測実行時間

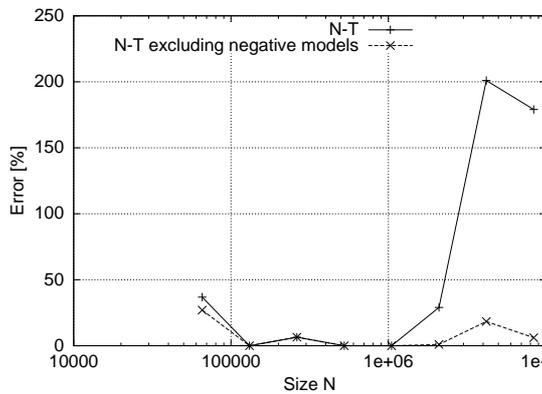


図 28 FFTE 誤差

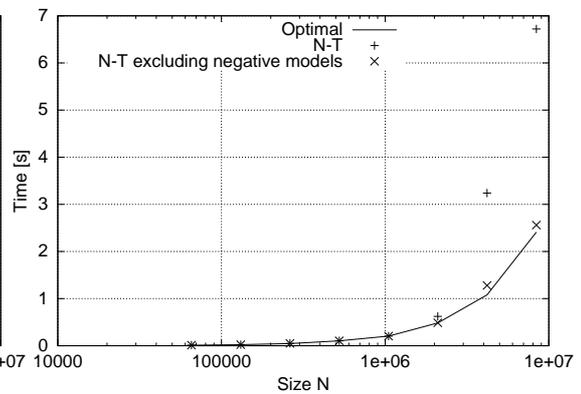


図 29 FFTE 実測実行時間

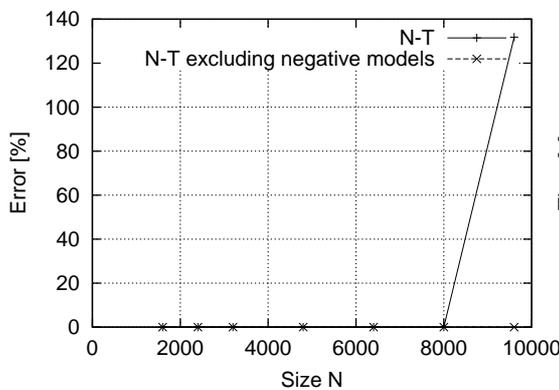


図 30 HPL 誤差

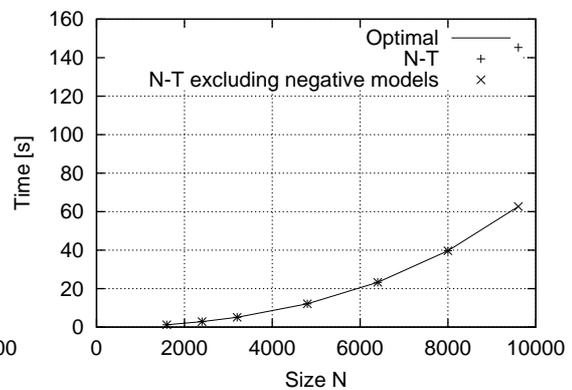


図 31 HPL 実測実行時間

3.3.2 考察

以上の評価から非負制約手法はN-Tモデルの精度を向上できる。しかし、P-Tモデルでは精度向上が確認できなかったこと、NP-Tモデルには適用出来ない事を考慮すると、非負制約手法は実用的ではない。

3.4 本研究の手法のまとめ

本研究で提案したNP-Tモデルは、P-Tで精度が低かったHimenoBMTで準最適～最適構成を予測できた。またHPL, hpcmw-solver-testではP-Tモデルと同精度であり、準最適～最適構成を予測できた。ただしFFTEでは誤差が大きく、予測に失敗している。NP-TモデルはP-Tモデルと同程度の時間で構築でき、より高精度と言える。

グリッチ削除手法は、N-TモデルとNP-Tモデルで精度の向上を確認できた。大規模クラスタではN-Tモデルは構築時間が膨大なため構築できない。P-TモデルもN-Tモデルが不足したため構築ができない。よって、グリッチ削除手法

は NP-T モデルで検討すべきである。

非負制約手法は，N-T モデルでのみ精度の向上を確認できた．しかし，大規模クラスタでは N-T モデルの構築は困難であるため，非負制約手法は実用的ではない．

4 プロセッサ 3 種での評価

プロセッサを表 12 の 3 種類に増やし評価を行う．評価対象は HimenoBMT , hpcmw-solver-test , FFTE , HPL である．HimenoBMT , hpcmw-solver-test , FFTE は表 13 の構成で評価を行う．ただし FFTE では，各サブクラスタの PE 数が 4 台の構成では，測定点数が足りずに P-T , NP-T モデルの係数が抽出できない．よって FFTE は表 14 の構成で評価を行った．

3 章の評価から，hpcmw-solver-test では $\log P$ を含まないモデルが高精度であったため，本章では $\log P$ を含まないモデルのみ評価する．

3.2 節の評価結果で，NP-T モデルは性能グリッチを削除すると精度の改善が見られたため，本章の評価でも NP-T モデルに対し，性能グリッチを削除して評価を行う．非負制約モデルは 3.3 節で，精度の向上が無かったため適用しない．

各モデルの構築時間を表 15 , 表 16 , 表 17 に示す．組合せ数が増えたことで，N-T モデルの測定時間が他モデルの 10 倍程度に増加している．クラスタ構成が複雑になれば，この差はさらに増大するため，大規模なクラスタでは N-T モデルの構築は時間的に困難であるが，今回は他モデルとの比較のために評価に加えている．また，各ベンチマークの総測定データ数を表??に示す．

表 12 測定環境

	サブクラスタ G_1	サブクラスタ G_2	サブクラスタ G_3
CPU	Pentium4 3.6 GHz	Xeon 2.8 GHz	Celeron M 1.5 GHz
OS	FedoraCore 4	Redhat Linux 9	FedoraCore 3
Kernel	2.6.11-1.1369_FC4smp	2.4.20-8	2.6.12-1.1381_FC3
通信環境	1000BASE-TX		
C コンパイラ	gcc 3.2.2		
Fortran コンパイラ	Intel Fortran Compiler 8.1		
通信ライブラリ	mpich-1.2.6 (バッファサイズ 8KB)		

表 13 HimenoBMT , hpcmw-solver-test , HPL 不均一環境の構成

	G_1	G_2	G_3	総組合せ数
プロセッサ 3 種	$0 \leq P_1 \leq 4$	$0 \leq P_2 \leq 4$	$0 \leq P_3 \leq 4$	404
	$0 \leq M_1 \leq 2$	$0 \leq M_2 \leq 2$	$0 \leq M_3 \leq 1$	

表 14 FFTE 不均一環境の構成

	G_1	G_2	G_3	総組合せ数
プロセッサ 3 種	$0 \leq P_1 \leq 8$ $0 \leq M_1 \leq 2$	$0 \leq P_2 \leq 8$ $0 \leq M_2 \leq 2$	$0 \leq P_3 \leq 8$ $0 \leq M_3 \leq 1$	2601

表 15 N-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	1.19×10^2	1.24×10^0	1.40×10^{-1}	1.20×10^2
hpcmwsolver-test	2.08×10^5	7.58×10^0	1.00×10^{-1}	2.08×10^5
HPL	3.34×10^4	4.95×10^0	3.20×10^{-1}	3.34×10^4
FFTE	1.83×10^2	3.86×10^0	1.70×10^{-1}	1.87×10^2

表 16 P-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	9.88×10^0	1.12×10^1	4.00×10^{-2}	2.11×10^1
hpcmwsolver-test	2.22×10^4	3.85×10^0	2.00×10^{-2}	2.22×10^4
HPL	2.38×10^3	1.33×10^0	5.00×10^{-2}	2.38×10^3
FFTE	2.21×10^1	1.73×10^1	2.03×10^0	4.13×10^1

表 17 NP-T モデル構築時間

所要時間 [s]				
	測定時間	抽出時間	予測時間	計
HimenoBMT	9.88×10^0	4.26×10^0	9.00×10^{-2}	1.42×10^1
hpcmwsolver-test	2.22×10^4	3.44×10^0	3.00×10^{-2}	2.22×10^4
HPL	2.38×10^3	3.43×10^0	2.00×10^{-2}	2.38×10^3
FFTE	2.21×10^1	2.15×10^1	2.30×10^{-2}	4.38×10^1

表 18 総測定データ数

	測定データ数		
	N-T	P-T	NP-T
HimenoBMT	3636	441	441
hpcmwsolver-test	2828	343	343
FFTE	2610	189	189
HPL	3636	441	441

4.1 HimenoBMT

実測結果を表 44, 表 45, 表 46 に示す. 図 32 より, N-T モデルは $N = 256$ で誤差が 93% と大きい. 外挿範囲の誤差増加はプロセッサ 2 種類の評価でも起きており, HimenoBMT の N-T モデルは外挿範囲の予測精度が低いと言える. P-T, NP-T モデルは, どちらも $48 \leq N \leq 256$ で誤差が 30% 以下であった. 図 33 より, N-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” から大きく外れ予測に失敗している. P-T, NP-T モデルは N-T モデルより精度は高いものの, 実測最短時間からは外れており精度の向上が必要である.

次に, グリッチの除去を $k = 0.9, 0.8, 0.7$ で行った NP-T モデルを構築して評価した. 実測結果を表 47, 表 48, 表 49 に示す. 図 34, 図 35 より, プロセッサ 3 種類の環境では性能グリッチを削除しても精度の向上は確認できなかった.

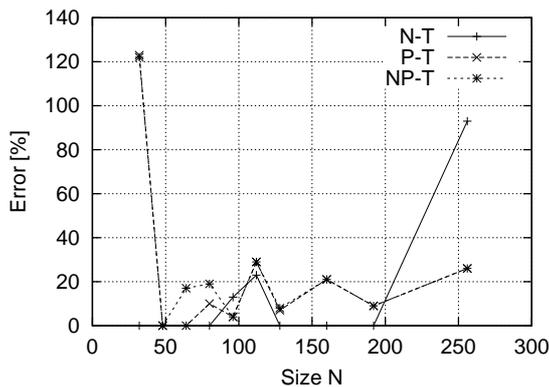


図 32 HimenoBMT 誤差

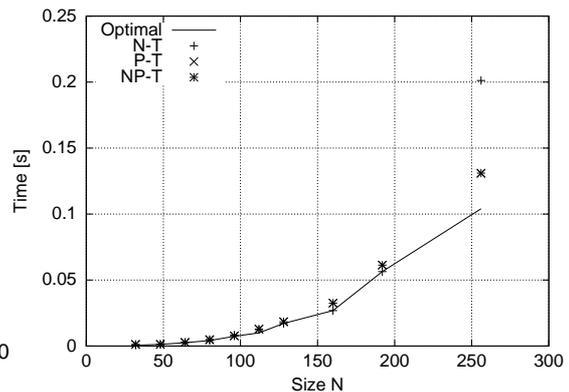


図 33 HimenoBMT 実測実行時間

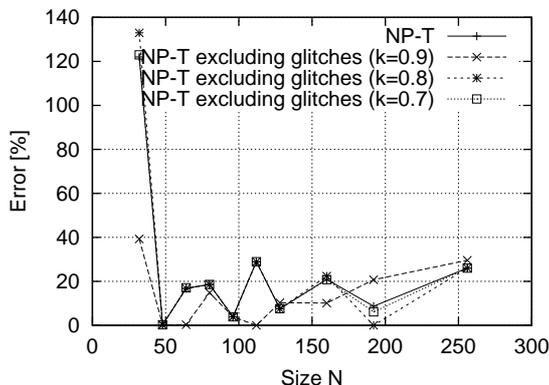


図 34 HimenoBMT 誤差

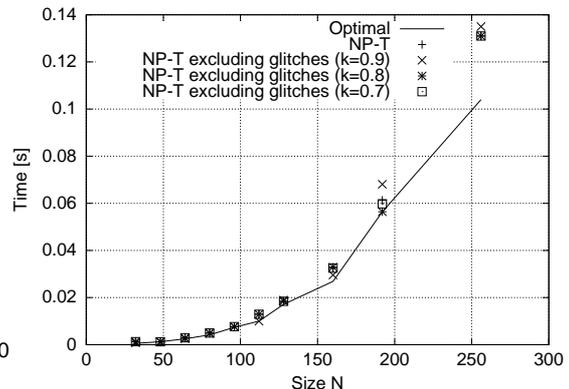


図 35 HimenoBMT 実測実行時間

4.2 hpcmw-solver-test

実測結果を表 50, 表 51, 表 52 に示す. 図 36 より, N-T モデルは $490 \leq N \leq 630$ で誤差が 50% を超え, 予測に失敗している. P-T, NP-T モデルは $432 \leq N \leq 660$ で誤差は 9% 以下であった. なお, P-T, NP-T モデルは $\log P$ を含まないモデルを用いている. 図 37 より, P-T, NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は実測最短時間を示す “Optimal” とほぼ一致し, 準最適 ~ 最適構成を予測できた.

次にグリッチ判定を $k = 1.0$ で行い, NP-T モデルを構築した. 実測結果を表 53 に示す. なお, $k = 0.95$ 以下ではグリッチが存在しなかった. 図 38, 図 39 より, 今回の評価ではグリッチの削除による精度の向上は確認できなかった.

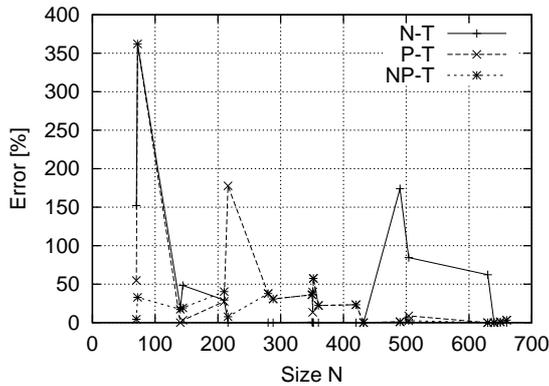


図 36 hpcmw-solver-test 誤差

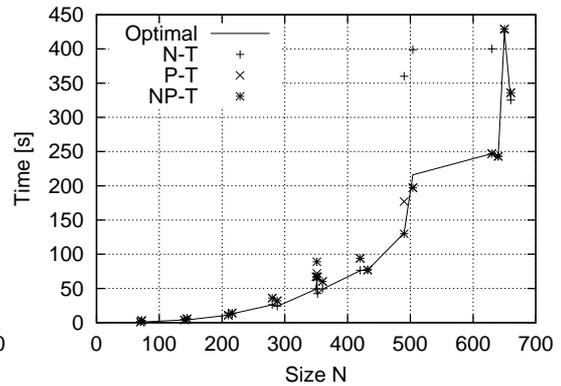


図 37 hpcmw-solver-test 実測実行時間

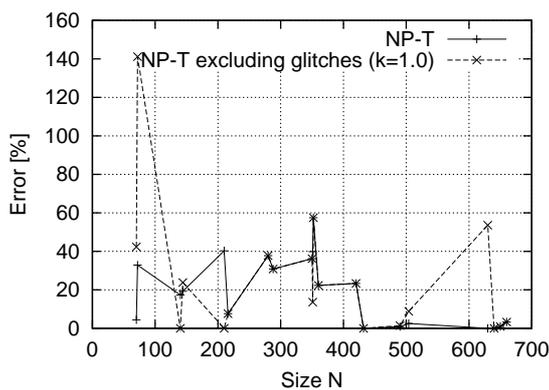


図 38 hpcmw-solver-test 誤差

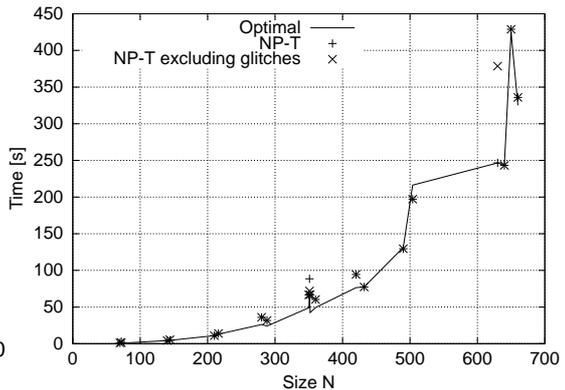


図 39 hpcmw-solver-test 実測実行時間

4.3 FFTE

FFTEの実測結果を表57, 表58, 表59に示す. 図40より, 全てのモデルで誤差が100%を超えている. また図41で, 全てのモデルの予測最適構成の実測実行時間は最短実行時間“Optimal”から大きく外れており予測に失敗している.

HimenoBMT, hpcmw-solver-testと同様に, グリッチを除去してNP-Tモデルを構築した. 実測結果を表60, 表61, 表62に示す. 図42, 図43より, 今回の評価ではグリッチ除去により精度の向上は確認できなかった.

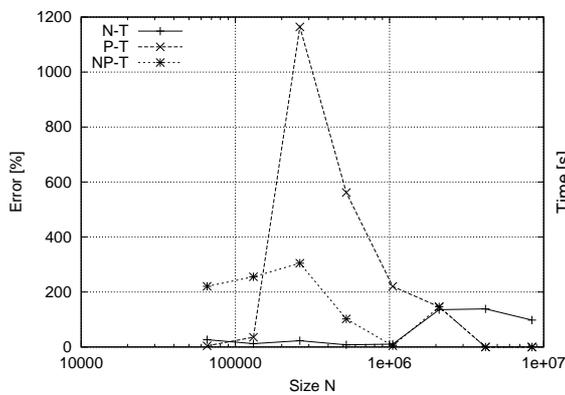


図40 FFTE 誤差

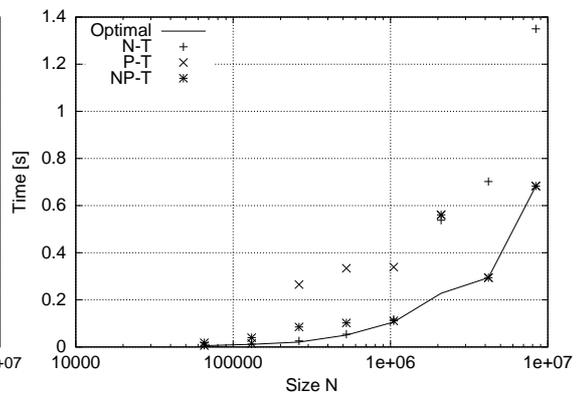


図41 FFTE 実測実行時間

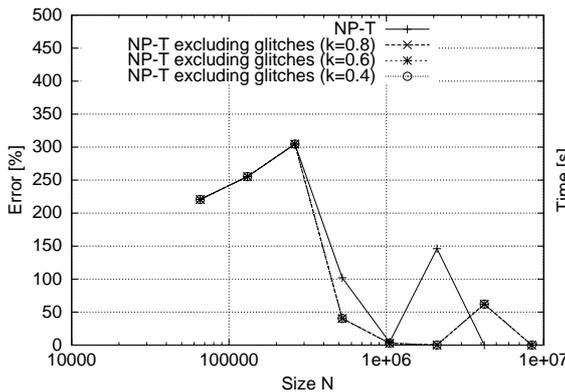


図42 FFTE 誤差

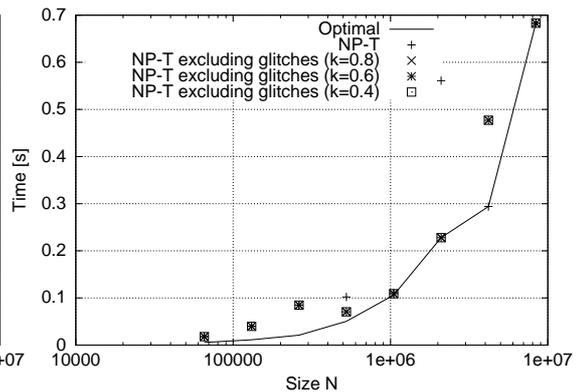


図43 FFTE 実測実行時間

4.4 HPL

実測結果を表54, 表55, 表56に示す. 図44より N-Tモデル, P-Tモデルは $N = 9600$ で誤差が40%を超えており, 予測に失敗している. NP-Tモデルは

6400 ≤ N ≤ 9600 で誤差 0% となり最適構成を予測できた．図 45 より，NP-T モデルの予測最適構成の実測実行時間は最短実行時間 “Optimal” とほぼ一致していることがわかる．なお，HPL の実測値には性能グリッチが存在しなかったためグリッチ削除手法は適用していない．

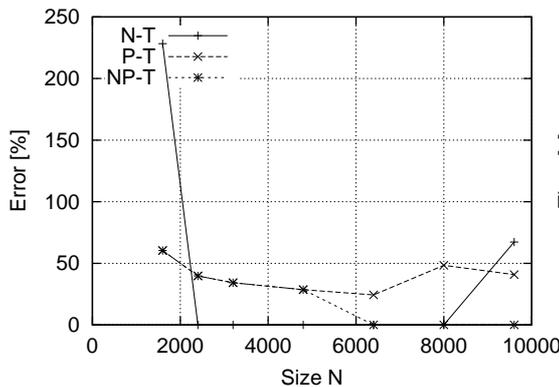


図 44 HPL 誤差

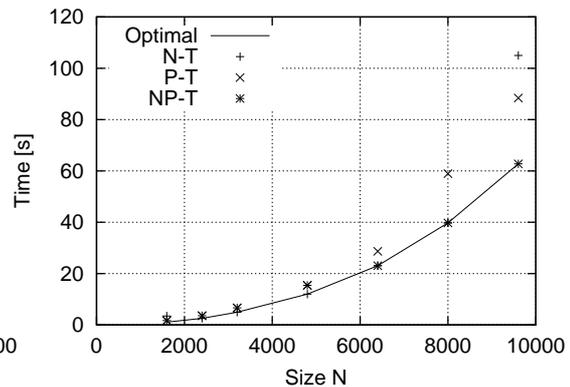


図 45 HPL 実測実行時間

4.5 考察

プロセッサ 3 種類でも，NP-T モデルは P-T モデルと同等以上のモデル予測に成功した．ただし，HimenoBMT と FFTE では誤差が残る結果となり，プロセッサ 2 種類の結果と比べて精度は低下している．これはサブクラスタ内の PE 台数が減少したことでフィッティング用のデータ数が減少し，モデル精度が減少したことが原因と考えられる．ヘテロ性の強いクラスタでは，サブクラスタ内の PE 台数はさらに減少すると考えられる．よって，サブクラスタ内の PE 台数が少ない場合においても精度を維持できるモデルが今後の課題となる．

NP-T モデルは P-T モデルに比べ，フィッティングに用いるデータ数が多いため，少ない測定点数でも精度が維持できると考えられる．本章の測定では hpcmw-solver-test と HPL では精度に差が生じているが，HimenoBMT では差が確認できなかった．そこで，HimenoBMT の測定点数を 6,7,8,9 点に変更して P-T，NP-T モデルを構築した．測定結果は表 63，表 64，表 65，表 66，表 67，表 68 に示す．なお P-T9 モデルは本章の HimenoBMT P-T モデル，NP-T9 モデルは HimenoBMT NP-T モデルと等価である．

各モデルの測定範囲を表 19 に，誤差を図 46，47 に示す．今回の評価では，NP-T モデルは測定点数が減っても誤差の増加が見られず，P-T モデルでは誤

差が増加した．NP-T モデルは N の測定点数を減らしても精度を維持できる．

表 19 HimenoBMT 各モデル測定範囲

モデル名		N	
P-T モデル	NP-T モデル	測定範囲	評価範囲
P-T9	NP-T9	32 ~ 192 9 点	32 ~ 256 10 点
P-T8	NP-T8	32 ~ 160 8 点	
P-T7	NP-T7	32 ~ 128 7 点	
P-T6	NP-T6	32 ~ 112 6 点	

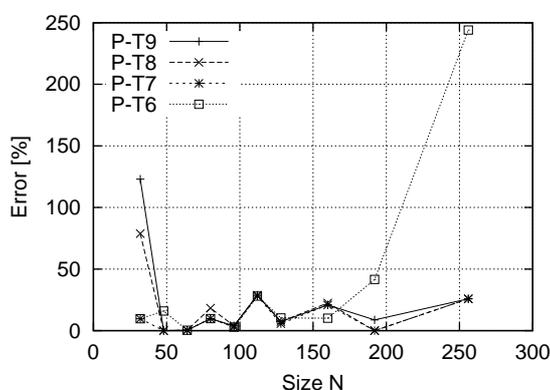


図 46 P-T モデル

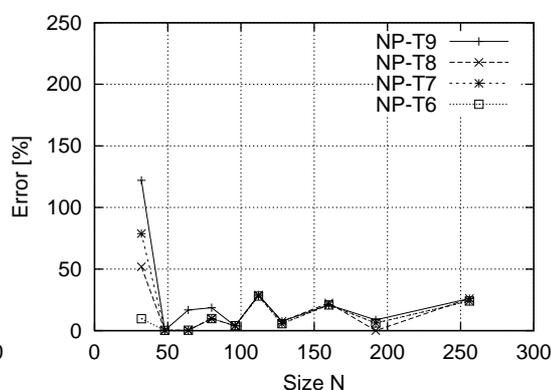


図 47 NP-T モデル

5 おわりに

プロセッサ 2 種類の環境において，岸本の提案した N-T，P-T モデルは HPL と hpcmw-solver-test で準最適 ~ 最適構成を予測できた．しかし HimenoBMT，FFTE では予測に失敗した．プロセッサ 3 種類の環境では hpcmw-solver-test で準最適 ~ 最適構成を予測できたが，HPL，HimenoBMT，FFTE では予測に失敗した．

本研究で提案した NP-T モデルはプロセッサ 2 種類環境の HPL，hpcmw-solver-test，HimenoBMT で準最適 ~ 最適構成が予測できた．また，プロセッサが 3 種類の環境では hpcmw-solver-test と HPL で予測に成功した．NP-T モデルは P-T モデルより高精度であることが確認できた．

本研究では全ノードを 1 台のスイッチに接続しているが，大規模なクラスタではスイッチが多段になり，通信時間のモデルが複雑になる．そのため今後は通

信時間の高精度なモデル化が課題となる。また PE 台数が増加した場合の FFTE の結果から，全対全通信の通信時間の高精度な予測も重要である。

参 考 文 献

- 1) Kishimoto, Y. and Ichikawa, S.: Optimizing the Configuration of a Heterogeneous Cluster with Multiprocessing and Execution-Time Estimation, *Parallel Computing*, Vol. 32, No. 7, pp. 691–710 (2005).
- 2) Kishimoto, Y. and Ichikawa, S.: An Execution-Time Estimation Model for Heterogeneous Clusters, *13th Heterogeneous Computing Workshop (HCW 2004)*, in *Proceedings of 18th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'04)*, IEEE Computer Society. (CD-ROM) (2004).
- 3) Petitet, A., Whaley, R. C., Dongarra, J. and Cleary, A.: HPL - A Portable Implementation of the High-Performance Linpack Benchmark for Distributed-Memory Computers, <http://www.netlib.org/benchmark/hpl/>.
- 4) Kalinov, A. and Klimov, S.: Optimal Mapping of a Parallel Application Processes onto Heterogeneous Platform, *Proceedings of the 19th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'05)* (2005).
- 5) 笹生健, 松岡聡: ヘテロなクラスタ環境における NAS Parallel Benchmarks の適用化, 情報処理学会研究報告 2003-HPC-93 (HOKKE2003), pp. 1–6 (2003).
- 6) 大滝雄介, 高橋大介, 朴泰祐, 佐藤三久: ヘテロなクラスタ環境における Strassen の行列積アルゴリズムの並列化, 情報処理学会論文誌コンピューティングシステム, Vol. 45, No. SIG6 (ACS 6), pp. 122–133 (2004).
- 7) 笹生健, 松岡聡, 建部修見: ヘテロなクラスタ環境における並列 LINPACK の最適化, 情報処理学会研究報告 2001-HPC-86, pp. 49–54 (2001).
- 8) 姫野龍太郎: Himeno BMT, <http://acc.riken.jp/HPC/HimenoBMT/index.html>.
- 9) 高度情報科学技術研究機構 (RIST): HPC-MW 検証ツール hpcmw-solver-test, <http://hpcmw.tokyo.rist.or.jp/index.html>.

- 10) Takahashi, D.: FFTE: A Fast Fourier Transform Package. <http://www.ffte.jp/>.
- 11) 高橋大介, 朴泰祐, 佐藤三久: PC クラスタにおける並列一次元 FFT のブロックアルゴリズム, 情報処理学会論文誌: ハイパフォーマンスコンピューティングシステム, Vol. 43, No. SIG6 (HPS 5), pp. 134–142 (2002).

付録

A.1 測定結果

表 20 HimenoBMT N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	8,2,3,1	-5.57×10^{-3}	1.11×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	10.28	0.85
48	2,1,8,1	-2.29×10^{-3}	1.80×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	2.79	0.41
64	2,1,8,1	-3.45×10^{-3}	3.14×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	2.48	0.34
80	2,1,8,1	1.60×10^{-3}	5.63×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.58	0.47
96	8,1,7,1	6.07×10^{-3}	6.96×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.02	0.17
112	8,1,7,1	8.12×10^{-3}	1.03×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.19	0.02
128	8,1,7,1	1.24×10^{-2}	1.47×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.15	0.01
160	8,1,8,1	2.67×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.08	0.00
192	8,1,8,1	4.97×10^{-2}	5.03×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.01	0.00
256	2,1,8,1	5.60×10^{-3}	2.22×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.95	1.04

表 21 HimenoBMT P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	1,2,1,1	-1.17×10^{-3}	2.17×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	2.95	2.61
48	8,1,8,1	-4.11×10^{-4}	1.28×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	1.32	0.00
64	8,1,8,1	-8.70×10^{-4}	2.34×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	1.37	0.00
80	8,1,8,1	3.33×10^{-3}	3.83×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.13	0.00
96	8,1,0,0	1.08×10^{-2}	9.92×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.82	0.67
112	8,1,0,0	1.73×10^{-2}	1.54×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.72	0.53
128	8,1,0,0	2.57×10^{-2}	2.34×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.77	0.61
160	8,1,0,0	4.97×10^{-2}	4.46×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	1.01	0.80
192	8,2,8,1	5.33×10^{-2}	5.40×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.06	0.07
256	8,1,8,1	7.99×10^{-2}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.27	0.03

表 22 hpcmw-solver-test N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	1,1,0,0	-3.05	4.32	7,1,3,1	0.86	4.54	4.00
72	3,2,2,1	-0.14	1.99	3,1,6,1	0.86	1.17	1.32
140	1,1,1,1	2.09	21.12	6,1,8,1	4.03	0.48	4.25
144	5,2,8,1	2.91	7.68	8,1,8,1	3.88	0.25	0.98
210	8,1,7,1	11.11	11.05	7,1,8,1	10.99	0.01	0.01
216	4,1,8,1	13.84	13.89	4,1,8,1	13.89	0.00	0.00
280	8,1,6,1	25.83	25.92	8,1,6,1	25.92	0.00	0.00
288	8,1,8,1	24.03	24.03	8,1,8,1	24.03	0.00	0.00
350	8,1,6,1	48.87	48.94	7,1,7,1	48.88	0.00	0.00
351	6,1,7,1	57.44	57.32	8,1,5,1	57.09	0.01	0.00
352	8,1,8,1	42.62	42.75	8,1,8,1	42.75	0.00	0.00
360	7,1,8,1	48.18	49.39	8,1,7,1	49.28	0.02	0.00
420	8,1,7,1	76.74	76.56	8,1,7,1	76.56	0.00	0.00
432	8,1,8,1	77.63	77.45	8,1,8,1	77.45	0.00	0.00
490	8,1,6,1	132.17	132.24	8,1,6,1	132.24	0.00	0.00
504	8,2,8,1	189.26	189.32	8,2,8,1	189.32	0.00	0.00
630	8,1,7,1	254.34	251.40	8,1,7,1	251.40	0.01	0.00
640	8,1,8,1	251.57	247.81	8,1,8,1	247.81	0.02	0.00
650	8,1,5,1	343.54	347.66	5,1,8,1	343.85	0.00	0.01
660	7,1,5,1	363.27	418.44	8,1,4,1	357.91	0.01	0.17

表 23 hpcmw-solver-test P-T モデル (log P を含むモデル)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	7,1,0,0	1.00	0.91	7,1,3,1	0.86	0.16	0.05
72	3,2,0,0	1.06	2.13	3,1,6,1	0.86	0.24	1.48
140	6,2,8,1	0.55	5.93	6,1,8,1	4.03	0.86	0.47
144	8,2,8,1	-0.17	6.88	8,1,8,1	3.88	1.04	0.77
210	7,2,7,1	10.76	19.10	7,1,8,1	10.99	0.02	0.74
216	8,2,8,1	10.32	17.71	4,1,8,1	13.89	0.26	0.28
280	6,1,8,1	32.13	26.23	8,1,6,1	25.92	0.24	0.01
288	8,1,8,1	33.36	24.03	8,1,8,1	24.03	0.39	0.00
350	6,1,8,1	61.23	49.04	7,1,7,1	48.88	0.25	0.00
351	5,1,8,1	63.76	57.48	8,1,5,1	57.09	0.12	0.01
352	8,1,8,1	59.20	42.75	8,1,8,1	42.75	0.38	0.00
360	7,1,8,1	64.34	49.39	8,1,7,1	49.28	0.31	0.00
420	7,1,8,1	96.24	77.03	8,1,7,1	76.56	0.26	0.01
432	8,1,8,1	100.16	77.45	8,1,8,1	77.45	0.29	0.00
490	6,1,8,1	147.04	132.51	8,1,6,1	132.24	0.11	0.00
504	8,2,8,1	231.75	189.32	8,2,8,1	189.32	0.22	0.00
630	7,1,8,1	255.71	251.68	8,1,7,1	251.40	0.02	0.00
640	8,1,8,1	255.96	247.81	8,1,8,1	247.81	0.03	0.00
650	5,1,8,1	312.77	343.85	5,1,8,1	343.85	0.09	0.00
660	4,1,8,1	354.39	359.41	8,1,4,1	357.91	0.01	0.00

表 24 hpcmw-solver-test P-T モデル (log P を含まないモデル)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{T}}$
70	1,2,0,0	-3.56	4.66	7,1,3,1	0.86	5.13	4.40
72	4,1,8,1	0.78	1.14	3,1,6,1	0.86	0.09	0.33
140	8,1,6,1	4.46	5.12	6,1,8,1	4.03	0.11	0.27
144	8,1,8,1	4.39	3.88	8,1,8,1	3.88	0.13	0.00
210	8,1,7,1	11.27	11.05	7,1,8,1	10.99	0.03	0.01
216	8,1,4,1	14.54	19.46	4,1,8,1	13.89	0.05	0.40
280	7,1,7,1	25.51	28.07	8,1,6,1	25.92	0.02	0.08
288	8,1,8,1	24.42	24.03	8,1,8,1	24.03	0.02	0.00
350	6,1,8,1	47.82	51.55	7,1,7,1	48.88	0.02	0.05
351	5,1,8,1	51.74	58.88	8,1,5,1	57.09	0.09	0.03
352	8,1,8,1	42.47	42.75	8,1,8,1	42.75	0.01	0.00
360	7,1,8,1	48.56	49.39	8,1,7,1	49.28	0.01	0.00
420	7,1,8,1	76.10	77.03	8,1,7,1	76.56	0.01	0.01
432	8,1,8,1	77.67	77.45	8,1,8,1	77.45	0.00	0.00
490	7,1,7,1	128.70	134.46	8,1,6,1	132.24	0.03	0.02
504	8,2,8,1	204.90	189.32	8,2,8,1	189.32	0.08	0.00
630	7,1,8,1	257.01	251.68	8,1,7,1	251.40	0.02	0.00
640	8,1,8,1	253.20	247.81	8,1,8,1	247.81	0.02	0.00
650	8,1,5,1	325.01	347.66	5,1,8,1	343.85	0.05	0.01
660	8,2,6,1	273.85	606.91	8,1,4,1	357.91	0.23	0.70

表 25 FFTE N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{T}}$
2^{16}	3,1,5,1	3.33E-03	1.41E-02	7,2,2,1	1.03E-02	0.68	0.37
2^{17}	5,2,6,1	1.34E-02	2.32E-02	5,2,6,1	2.32E-02	0.42	0.00
2^{18}	8,1,0,0	4.97E-02	4.94E-02	5,2,6,1	4.64E-02	0.07	0.06
2^{19}	8,1,0,0	1.05E-01	1.05E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.00	0.00
2^{20}	6,2,4,1	1.99E-01	2.05E-01	6,2,4,1	2.05E-01	0.03	0.00
2^{21}	3,1,5,1	-1.50E-01	6.23E-01	8,1,0,0	4.83E-01	1.31	0.29
2^{22}	2,2,0,0	-2.54E+00	3.24E+00	8,2,0,0	1.08E+00	3.35	2.01
2^{23}	2,2,0,0	-1.19E+01	6.72E+00	8,2,0,0	2.41E+00	5.95	1.79

表 26 FFTE P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{T}}$
2^{16}	8,1,8,1	-5.94E-04	5.54E-01	7,2,2,1	1.03E-02	1.06	52.96
2^{17}	8,1,8,1	3.13E-04	5.27E-01	5,2,6,1	2.32E-02	0.99	21.75
2^{18}	8,1,8,1	2.74E-03	5.23E-01	5,2,6,1	4.64E-02	0.94	10.29
2^{19}	8,1,8,1	6.78E-03	5.33E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.94	4.09
2^{20}	8,1,8,1	1.07E-02	1.13E+00	6,2,4,1	2.05E-01	0.95	4.54
2^{21}	8,1,8,1	6.82E-03	1.47E+00	8,1,0,0	4.83E-01	0.99	2.03
2^{22}	8,1,8,1	-2.82E-02	2.13E+00	8,2,0,0	1.08E+00	1.03	0.97
2^{23}	8,1,8,1	-1.58E-01	2.72E+00	8,2,0,0	2.41E+00	1.07	0.13

表 27 HPL N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	4,1,0,0	1.22	1.21	4,1,0,0	1.21	0.01	0.00
2400	6,1,0,0	2.82	2.87	6,1,0,0	2.87	0.02	0.00
3200	8,1,0,0	5.11	5.11	8,1,0,0	5.11	0.00	0.00
4800	8,1,0,0	12.15	12.11	8,1,0,0	12.11	0.00	0.00
6400	8,1,0,0	23.25	23.26	8,1,0,0	23.26	0.00	0.00
8000	8,1,0,0	39.18	39.66	8,1,0,0	39.66	0.01	0.00
9600	3,2,0,0	48.42	145.29	8,1,0,0	62.67	0.23	1.32

表 28 HPL P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	3,1,0,0	1.27	1.35	4,1,0,0	1.21	0.05	0.12
2400	8,1,0,0	2.85	3.63	6,1,0,0	2.87	0.01	0.26
3200	8,1,0,0	5.07	5.11	8,1,0,0	5.11	0.01	0.00
4800	8,1,0,0	12.08	12.11	8,1,0,0	12.11	0.00	0.00
6400	8,1,0,0	23.10	23.26	8,1,0,0	23.26	0.01	0.00
8000	8,1,0,0	38.82	39.66	8,1,0,0	39.66	0.02	0.00
9600	8,1,8,1	59.85	69.95	8,1,0,0	62.67	0.04	0.12

表 29 HimenoBMT NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	8,2,0,0	-2.18×10^{-3}	8.36×10^{-4}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	4.63	0.39
48	8,2,0,0	1.48×10^{-4}	1.63×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	0.88	0.28
64	8,2,0,0	3.09×10^{-3}	2.73×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	0.32	0.17
80	8,2,0,0	7.06×10^{-3}	5.29×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.84	0.38
96	7,1,8,1	1.12×10^{-2}	6.98×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.88	0.17
112	7,2,8,1	1.47×10^{-2}	1.46×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.47	0.46
128	8,2,8,1	1.95×10^{-2}	1.74×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.34	0.20
160	8,1,8,1	3.67×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.48	0.00
192	8,1,8,1	6.27×10^{-2}	5.03×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.25	0.00
256	8,1,8,1	1.54×10^{-1}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.41	0.03

表 30 hpcmw-solver-test NP-T モデル ($\log P$ を含むモデル)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	7,2,0,0	-2.01	2.53	7,1,3,1	0.86	3.33	1.94
72	6,2,0,0	-1.06	2.70	3,1,6,1	0.86	2.24	2.15
140	5,1,0,0	7.09	8.03	6,1,8,1	4.03	0.76	0.99
144	6,1,0,0	7.63	7.18	8,1,8,1	3.88	0.97	0.85
210	6,1,8,1	19.82	11.76	7,1,8,1	10.99	0.80	0.07
216	8,1,0,0	20.37	17.91	4,1,8,1	13.89	0.47	0.29
280	6,1,8,1	33.66	26.23	8,1,6,1	25.92	0.30	0.01
288	8,1,8,1	34.28	24.03	8,1,8,1	24.03	0.43	0.00
350	6,1,8,1	56.20	49.04	7,1,7,1	48.88	0.15	0.00
351	5,1,8,1	59.23	57.48	8,1,5,1	57.09	0.04	0.01
352	8,1,8,1	52.89	42.75	8,1,8,1	42.75	0.24	0.00
360	7,1,8,1	57.82	49.04	8,1,7,1	49.28	0.17	0.00
420	7,1,8,1	85.31	83.72	8,1,7,1	76.56	0.11	0.09
432	8,1,8,1	87.65	77.45	8,1,8,1	77.45	0.13	0.00
490	6,1,8,1	136.50	132.51	8,1,6,1	132.24	0.03	0.00
504	8,2,8,1	191.77	189.32	8,2,8,1	189.32	0.01	0.00
630	7,1,8,1	261.90	251.68	8,1,7,1	251.40	0.04	0.00
640	8,1,8,1	258.39	247.81	8,1,8,1	247.81	0.04	0.00
650	5,1,8,1	327.42	343.85	5,1,8,1	343.85	0.05	0.00
660	4,1,8,1	369.29	359.41	8,1,4,1	357.91	0.03	0.00

表 31 hpcmw-solver-test NP-T モデル ($\log P$ を含まないモデル)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	6,1,8,1	0.74	0.93	7,1,3,1	0.86	0.14	0.07
72	4,1,8,1	0.83	1.14	3,1,6,1	0.86	0.03	0.33
140	6,1,8,1	4.43	4.03	6,1,8,1	4.03	0.10	0.00
144	8,1,8,1	4.35	3.88	8,1,8,1	3.88	0.12	0.00
210	7,1,8,1	11.24	10.99	7,1,8,1	10.99	0.02	0.00
216	4,1,8,1	14.51	13.89	4,1,8,1	13.89	0.04	0.00
280	6,1,8,1	25.53	26.23	8,1,6,1	25.92	0.02	0.01
288	8,1,8,1	24.45	24.03	8,1,8,1	24.03	0.02	0.00
350	6,1,8,1	47.86	49.04	7,1,7,1	48.88	0.02	0.00
351	5,1,8,1	51.79	57.48	8,1,5,1	57.09	0.09	0.01
352	8,1,8,1	42.87	42.75	8,1,8,1	42.75	0.00	0.00
360	7,1,8,1	48.61	49.04	8,1,7,1	49.28	0.01	0.00
420	7,1,8,1	76.12	83.72	8,1,7,1	76.56	0.01	0.09
432	8,1,8,1	77.68	77.45	8,1,8,1	77.45	0.00	0.00
490	6,1,8,1	128.59	132.51	8,1,6,1	132.24	0.03	0.00
504	8,2,8,1	182.43	189.32	8,2,8,1	189.32	0.04	0.00
630	7,1,8,1	256.08	251.68	8,1,7,1	251.40	0.02	0.00
640	8,1,8,1	252.17	247.81	8,1,8,1	247.81	0.02	0.00
650	5,1,8,1	323.90	343.85	5,1,8,1	343.85	0.06	0.00
660	4,1,8,1	363.05	359.41	8,1,4,1	357.91	0.01	0.00

表 32 FFTE NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	8,1,8,1	-2.41E-02	5.54E-01	7,2,2,1	1.03E-02	3.34	52.96
2^{17}	8,1,8,1	-1.42E-02	5.27E-01	5,2,6,1	2.32E-02	1.61	21.75
2^{18}	8,1,8,1	6.20E-03	5.23E-01	5,2,6,1	4.64E-02	0.87	10.29
2^{19}	8,1,8,1	4.76E-02	5.33E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.55	4.09
2^{20}	8,1,8,1	1.36E-01	1.13E+00	6,2,4,1	2.05E-01	0.34	4.54
2^{21}	8,1,8,1	3.54E-01	1.47E+00	8,1,0,0	4.83E-01	0.27	2.03
2^{22}	2,2,0,0	3.39E-01	3.24E+00	8,2,0,0	1.08E+00	0.69	2.01
2^{23}	2,2,0,0	-2.28E+00	6.72E+00	8,2,0,0	2.41E+00	1.95	1.79

表 33 HPL NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	3,1,0,0	1.25	1.35	4,1,0,0	1.21	0.04	0.12
2400	7,1,0,0	2.88	2.95	6,1,0,0	2.87	0.00	0.03
3200	8,1,0,0	5.07	5.11	8,1,0,0	5.11	0.01	0.00
4800	8,1,0,0	12.01	12.11	8,1,0,0	12.11	0.01	0.00
6400	8,1,0,0	23.13	23.26	8,1,0,0	23.26	0.01	0.00
8000	8,1,0,0	39.33	39.66	8,1,0,0	39.66	0.01	0.00
9600	8,1,0,0	61.49	62.67	8,1,0,0	62.67	0.02	0.00

表 34 HimenoBMT グリッチを削除した N-T モデル (許容数 0)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	1,2,1,1	-1.98×10^{-3}	2.52×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	4.31	3.20
48	7,2,0,0	7.02×10^{-4}	2.59×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	0.45	1.02
64	7,2,0,0	2.59×10^{-3}	4.77×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	0.11	1.04
80	8,1,8,1	4.26×10^{-3}	3.83×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.11	0.00
96	8,1,8,1	6.22×10^{-3}	5.95×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.04	0.00
112	8,1,8,1	9.08×10^{-3}	1.02×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.09	0.01
128	8,1,8,1	1.32×10^{-2}	1.45×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.09	0.00
160	8,1,8,1	2.67×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.08	0.00
192	8,1,8,1	4.97×10^{-2}	5.03×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.01	0.00
256	8,1,8,1	1.35×10^{-1}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.24	0.03

表 35 HimenoBMT グリッチを削除した N-T モデル (許容数 1)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	1,2,1,1	-1.98×10^{-3}	2.52×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	4.31	3.20
48	7,2,0,0	7.02×10^{-4}	2.59×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	0.45	1.02
64	8,1,7,1	2.59×10^{-3}	2.49×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	0.11	0.06
80	8,1,8,1	4.26×10^{-3}	3.83×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.11	0.00
96	8,1,8,1	6.22×10^{-3}	5.95×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.04	0.00
112	8,1,8,1	9.08×10^{-3}	1.02×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.09	0.01
128	8,1,8,1	1.32×10^{-2}	1.45×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.09	0.00
160	8,1,8,1	2.67×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.08	0.00
192	8,1,7,1	4.58×10^{-2}	7.41×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.09	0.47
256	6,1,3,1	9.92×10^{-2}	1.48×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.09	0.36

表 36 HimenoBMT グリッチを削除した NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	8,2,0,0	-1.72×10^{-4}	8.36×10^{-4}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	1.29	0.39
48	8,1,8,1	1.45×10^{-3}	1.28×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	0.14	0.00
64	8,1,8,1	2.47×10^{-3}	2.73×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	0.06	0.17
80	8,1,8,1	4.16×10^{-3}	3.83×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.09	0.00
96	8,1,8,1	6.54×10^{-3}	6.98×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.10	0.17
112	8,1,8,1	1.01×10^{-2}	1.02×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.01	0.01
128	8,1,8,1	1.64×10^{-2}	1.45×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.13	0.00
160	8,1,8,1	3.52×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.42	0.00
192	8,1,8,1	6.33×10^{-2}	5.03×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.26	0.00
256	8,1,8,1	1.53×10^{-1}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.40	0.03

表37 FFTE グリッチを削除したN-Tモデル(許容数0)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2 ¹⁶	8,2,0,0	1.12E-02	1.11E-02	7,2,2,1	1.03E-02	0.09	0.08
2 ¹⁷	8,1,0,0	2.41E-02	2.52E-02	5,2,6,1	2.32E-02	0.04	0.09
2 ¹⁸	8,1,0,0	4.97E-02	4.94E-02	5,2,6,1	4.64E-02	0.07	0.06
2 ¹⁹	8,1,0,0	1.05E-01	1.05E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.00	0.00
2 ²⁰	8,2,0,0	2.06E-01	2.05E-01	6,2,4,1	2.05E-01	0.01	0.00
2 ²¹	8,2,0,0	3.39E-01	5.12E-01	8,1,0,0	4.83E-01	0.30	0.06
2 ²²	8,2,0,0	4.94E-01	1.08E+00	8,2,0,0	1.08E+00	0.54	0.00
2 ²³	8,2,0,0	5.66E-01	2.41E+00	8,2,0,0	2.41E+00	0.77	0.00

表38 FFTE グリッチを削除したN-Tモデル(許容数1)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2 ¹⁶	8,2,0,0	1.12E-02	1.11E-02	7,2,2,1	1.03E-02	0.09	0.08
2 ¹⁷	8,1,0,0	2.41E-02	2.52E-02	5,2,6,1	2.32E-02	0.04	0.09
2 ¹⁸	8,1,0,0	4.97E-02	4.94E-02	5,2,6,1	4.64E-02	0.07	0.06
2 ¹⁹	8,1,0,0	1.05E-01	1.05E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.00	0.00
2 ²⁰	8,2,0,0	2.06E-01	2.05E-01	6,2,4,1	2.05E-01	0.01	0.00
2 ²¹	8,2,0,0	3.39E-01	5.12E-01	8,1,0,0	4.83E-01	0.30	0.06
2 ²²	8,2,0,0	4.94E-01	1.08E+00	8,2,0,0	1.08E+00	0.54	0.00
2 ²³	8,2,0,0	5.66E-01	2.41E+00	8,2,0,0	2.41E+00	0.77	0.00

表39 FFTE グリッチを削除したNP-Tモデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2 ¹⁶	8,1,8,1	-2.41E-02	5.54E-01	7,2,2,1	1.03E-02	3.34	52.96
2 ¹⁷	8,1,8,1	-1.42E-02	5.27E-01	5,2,6,1	2.32E-02	1.61	21.75
2 ¹⁸	8,1,8,1	6.20E-03	5.23E-01	5,2,6,1	4.64E-02	0.87	10.29
2 ¹⁹	8,1,8,1	4.76E-02	5.33E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.55	4.09
2 ²⁰	8,1,8,1	1.36E-01	1.13E+00	6,2,4,1	2.05E-01	0.34	4.54
2 ²¹	8,1,8,1	3.54E-01	1.47E+00	8,1,0,0	4.83E-01	0.27	2.03
2 ²²	2,2,0,0	3.39E-01	3.24E+00	8,2,0,0	1.08E+00	0.69	2.01
2 ²³	2,2,0,0	-2.36E+00	6.72E+00	8,2,0,0	2.41E+00	1.98	1.79

表40 HimenoBMT 非負制約N-Tモデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	8,2,3,1	-5.57×10^{-3}	1.11×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	10.28	0.85
48	7,1,7,1	9.66×10^{-4}	1.53×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	0.24	0.19
64	7,1,7,1	1.48×10^{-3}	2.77×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	0.37	0.18
80	7,1,7,1	3.52×10^{-3}	4.67×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.08	0.22
96	8,1,7,1	6.07×10^{-3}	6.96×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.02	0.17
112	8,1,7,1	8.12×10^{-3}	1.03×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.19	0.02
128	8,1,7,1	1.24×10^{-2}	1.47×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.15	0.01
160	8,1,8,1	2.67×10^{-2}	2.48×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.08	0.00
192	8,1,8,1	4.97×10^{-2}	5.03×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.01	0.00
256	8,1,8,1	1.35×10^{-1}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.24	0.03

表 41 HimenoBMT 非負制約 P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	1,2,1,1	-1.17×10^{-3}	2.17×10^{-3}	8,1,0,0	6.00×10^{-4}	2.95	2.61
48	8,1,8,1	-1.35×10^{-3}	1.28×10^{-3}	8,1,8,1	1.28×10^{-3}	2.05	0.00
64	8,1,8,1	-2.82×10^{-3}	2.34×10^{-3}	8,1,8,1	2.34×10^{-3}	2.21	0.00
80	8,1,8,1	3.93×10^{-4}	3.83×10^{-3}	8,1,8,1	3.83×10^{-3}	0.90	0.00
96	8,1,0,0	1.08×10^{-2}	9.92×10^{-3}	8,1,8,1	5.95×10^{-3}	0.81	0.67
112	8,2,0,0	1.65×10^{-2}	1.66×10^{-2}	7,1,5,1	1.00×10^{-2}	0.65	0.65
128	8,2,0,0	2.42×10^{-2}	2.54×10^{-2}	8,1,8,1	1.45×10^{-2}	0.66	0.75
160	8,2,0,0	4.71×10^{-2}	4.67×10^{-2}	8,1,8,1	2.48×10^{-2}	0.90	0.89
192	8,2,8,1	2.64×10^{-2}	5.40×10^{-2}	8,1,8,1	5.03×10^{-2}	0.48	0.07
256	8,1,8,1	7.66×10^{-2}	1.12×10^{-1}	8,1,7,1	1.09×10^{-1}	0.30	0.03

表 42 FFTE 非負制約 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	5,2,6,1	6.39E-03	1.31E-02	7,2,2,1	1.03E-02	0.38	0.27
2^{17}	5,2,6,1	1.34E-02	2.32E-02	5,2,6,1	2.32E-02	0.42	0.00
2^{18}	8,1,0,0	4.97E-02	4.94E-02	5,2,6,1	4.64E-02	0.07	0.06
2^{19}	8,1,0,0	1.05E-01	1.05E-01	8,1,0,1	1.05E-01	0.00	0.00
2^{20}	6,2,4,1	1.99E-01	2.05E-01	6,2,4,1	2.05E-01	0.03	0.00
2^{21}	7,1,1,1	4.83E-01	4.87E-01	8,1,0,0	4.83E-01	0.00	0.01
2^{22}	7,1,1,1	1.02E+00	1.28E+00	8,2,0,0	1.08E+00	0.06	0.18
2^{23}	6,1,2,1	2.13E+00	2.56E+00	8,2,0,0	2.41E+00	0.12	0.06

表 43 HPL 非負制約 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	P_2, M_2, P_3, M_3	τ	$\hat{\tau}$	P_2, M_2, P_3, M_3	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	4,1,0,0	1.22	1.21	4,1,0,0	1.21	0.01	0.00
2400	6,1,0,0	2.82	2.87	6,1,0,0	2.87	0.02	0.00
3200	8,1,0,0	5.11	5.11	8,1,0,0	5.11	0.00	0.00
4800	8,1,0,0	12.15	12.11	8,1,0,0	12.11	0.00	0.00
6400	8,1,0,0	23.25	23.26	8,1,0,0	23.26	0.00	0.00
8000	8,1,0,0	39.18	39.66	8,1,0,0	39.66	0.01	0.00
9600	8,1,0,0	60.69	62.67	8,1,0,0	62.67	0.03	0.00

表 44 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	3,1,4,2,0,0	-5.44×10^{-3}	5.80×10^{-4}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	10.37	0.00
48	3,2,3,1,4,1	5.71×10^{-4}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.54	0.00
64	4,2,2,1,4,1	1.76×10^{-3}	2.51×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.30	0.00
80	4,2,3,1,4,1	4.07×10^{-3}	4.17×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.03	0.00
96	4,1,4,1,4,1	7.25×10^{-3}	8.37×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.02	0.13
112	3,2,4,1,4,1	1.01×10^{-2}	1.24×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.01	0.23
128	4,2,4,1,0,0	1.48×10^{-2}	1.71×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.13	0.00
160	4,2,4,1,0,0,2	2.99×10^{-2}	2.69×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.11	0.00
192	4,1,0,0,0,0	5.63×10^{-2}	5.64×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.00	0.00
256	3,2,2,1,2,1	1.28×10^{-1}	2.01×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.23	0.93

表 45 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	0,0,0,0,2,1	-1.37×10^{-3}	1.29×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	3.36	1.23
48	4,1,0,0,0,0	1.20×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.03	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.55×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.02	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.80×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.15	0.10
96	4,2,4,1,4,1	5.47×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.26	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.79×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.12	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.45×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.15	0.07
160	4,2,4,1,4,1	3.05×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.14	0.21
192	4,2,4,1,4,1	5.32×10^{-2}	6.13×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.06	0.09
256	4,1,0,0,0,0	1.35×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.30	0.26

表 46 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	0,0,0,0,2,1	-9.41×10^{-4}	1.29×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	2.62	1.22
48	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.00	0.00
64	4,2,4,1,4,1	1.78×10^{-3}	2.93×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.29	0.17
80	4,2,4,1,4,1	2.96×10^{-3}	4.95×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.29	0.19
96	4,2,4,1,4,1	5.14×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.30	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.55×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.15	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.35×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.21	0.08
160	4,2,4,1,4,1	2.92×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.09	0.21
192	4,2,4,1,4,1	5.43×10^{-2}	6.13×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.04	0.09
256	4,1,0,0,0,0	1.38×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.33	0.26

表 47 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル
($k=0.9$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	$\hat{\tau}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$
32	2,2,0,0,0,0	-1.68×10^{-4}	8.08×10^{-4}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	1.29	0.39
48	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.00	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.33×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.07	0.00
80	4,2,0,0,0,0	4.30×10^{-3}	4.79×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.03	0.15
96	4,2,4,1,4,1	4.50×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.39	0.04
112	4,1,4,1,4,1	6.64×10^{-3}	1.00×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.34	0.00
128	4,1,4,1,4,1	1.14×10^{-2}	1.89×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.34	0.10
160	4,1,4,1,4,1	2.65×10^{-2}	2.96×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.02	0.10
192	4,1,4,1,4,1	5.06×10^{-2}	6.81×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.10	0.21
256	4,1,4,1,4,1	1.33×10^{-1}	1.35×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.27	0.30

表 48 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル
($k=0.8$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	$\hat{\tau}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$
32	0,0,2,1,0,0	1.03×10^{-4}	1.35×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	0.82	1.33
48	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.00	0.00
64	4,2,4,1,4,1	1.59×10^{-3}	2.93×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.37	0.17
80	4,2,4,1,4,1	2.86×10^{-3}	4.95×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.32	0.19
96	4,2,4,1,4,1	5.14×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.30	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.63×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.14	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.53×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.11	0.08
160	4,1,0,0,0,0	3.50×10^{-2}	3.29×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.30	0.22
192	4,1,0,0,0,0	5.94×10^{-2}	5.64×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.05	0.00
256	4,1,0,0,0,0	1.38×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.32	0.26

表 49 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル
($k=0.7$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	$\hat{\tau}$	$\frac{\tau - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{\tau}}{\hat{\tau}}$
32	2,1,0,0,2,1	-9.41×10^{-4}	1.29×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80×10^{-4}	2.62	1.23
48	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.00	0.00
64	4,2,4,1,4,1	1.78×10^{-3}	2.94×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.29	0.17
80	4,2,4,1,4,1	2.96×10^{-3}	4.95×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.29	0.19
96	4,2,4,1,4,1	5.14×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.30	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.55×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.15	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.35×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.21	0.08
160	4,2,4,1,4,1	2.92×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.08	0.21
192	4,2,4,1,4,1	5.43×10^{-2}	5.98×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.04	0.06
256	4,1,0,0,0,0	1.38×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.32	0.26

表 50 hpcmw-solver-test プロセッサ 3 種類 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	1,2,4,2,0,0	-2.04	2.15	1,2,4,1,4,1	0.85	3.40	1.52
72	0,0,2,2,0,0	-2.14	3.00	4,1,0,0,0,0	0.65	4.30	3.62
140	3,2,4,1,0,0	-8.34	5.13	4,1,0,0,0,0	4.28	2.95	0.20
144	4,2,2,2,4,1	-0.07	6.65	4,2,4,1,0,0	4.49	1.02	0.48
210	3,2,4,1,0,0	7.33	14.15	4,2,3,1,4,1	10.93	0.33	0.29
216	4,2,4,1,0,0	12.94	12.97	4,2,4,1,0,0	12.97	0.00	0.00
280	3,2,4,1,4,1	26.06	26.14	3,2,4,1,4,1	26.14	0.00	0.00
288	4,2,4,1,4,1	23.94	24.14	4,2,4,1,4,1	24.14	0.01	0.00
350	3,2,4,1,4,1	49.26	49.29	4,2,4,1,2,1	48.99	0.01	0.01
351	3,2,3,1,0,0	63.73	63.32	3,2,3,1,0,0	63.32	0.01	0.00
352	4,2,4,1,4,1	42.65	42.43	4,2,4,1,4,1	42.43	0.01	0.00
360	4,2,3,1,4,1	49.24	49.30	4,2,3,1,4,1	49.30	0.00	0.00
420	4,2,3,1,4,1	76.68	76.49	4,2,3,1,4,1	76.49	0.00	0.00
432	4,2,4,1,4,1	77.43	77.41	4,2,4,1,4,1	77.41	0.00	0.00
490	0,0,2,2,3,1	42.42	359.99	3,2,4,1,4,1	131.43	0.68	1.74
504	1,2,2,2,2,1	143.50	398.99	3,2,4,2,4,1	216.29	0.34	0.84
630	3,2,4,1,0,0	181.65	400.07	4,2,3,1,4,1	246.52	0.26	0.62
640	4,2,4,1,4,1	242.78	243.16	4,2,4,1,4,1	243.16	0.00	0.00
650	3,2,4,1,3,1	354.79	424.90	3,2,4,1,3,1	424.90	0.16	0.00
660	4,2,4,1,0,0	333.14	325.19	4,2,4,1,0,0	325.19	0.02	0.00

表 51 hpcmw-solver-test プロセッサ 3 種類 P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	4,1,1,2,4,1	0.08	1.32	1,2,4,1,4,1	0.85	0.90	0.55
72	0,0,2,2,0,0	-1.80	3.00	4,1,0,0,0,0	0.65	3.78	3.62
140	4,1,0,0,0,0	4.59	4.28	4,1,0,0,0,0	4.28	0.07	0.00
144	4,2,4,1,4,1	5.59	4.62	4,2,4,1,0,0	4.49	0.25	0.03
210	4,2,3,1,4,1	11.94	13.95	4,2,3,1,4,1	10.93	0.09	0.28
216	4,1,4,1,4,1	12.02	36.01	4,2,4,1,0,0	12.97	0.07	1.78
280	4,1,2,1,4,1	26.38	36.01	3,2,4,1,4,1	26.14	0.01	0.38
288	4,1,4,1,4,1	22.11	31.58	4,2,4,1,4,1	24.14	0.08	0.31
350	4,1,2,1,4,1	50.16	66.73	4,2,4,1,2,1	48.99	0.02	0.36
351	4,1,1,1,4,1	58.26	71.85	3,2,3,1,0,0	63.32	0.08	0.13
352	4,1,3,1,4,1	44.76	66.83	4,2,4,1,4,1	42.43	0.05	0.57
360	4,1,4,1,4,1	42.44	60.32	4,2,3,1,4,1	49.30	0.14	0.22
420	4,1,4,1,4,1	71.33	94.36	4,2,3,1,4,1	76.49	0.07	0.23
432	4,2,4,1,4,1	95.81	77.41	4,2,4,1,4,1	77.41	0.24	0.00
490	4,2,2,1,4,1	145.43	129.54	3,2,4,1,4,1	131.43	0.11	0.01
504	4,2,3,2,4,1	216.08	197.17	3,2,4,2,4,1	216.29	0.00	0.09
630	4,2,3,1,4,1	276.99	246.52	4,2,3,1,4,1	246.52	0.12	0.00
640	4,2,4,1,4,1	277.52	243.16	4,2,4,1,4,1	243.16	0.14	0.00
650	4,2,1,1,4,1	331.06	428.90	3,2,4,1,3,1	424.90	0.22	0.01
660	4,1,4,1,4,1	363.82	335.91	4,2,4,1,0,0	325.19	0.12	0.03

表 52 hpcmw-solver-test プロセッサ 3 種類 NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	2,1,0,0,0,0	0.84	1.12	1,2,4,1,4,1	0.85	0.01	0.31
72	0,0,2,2,0,0	-1.33	3.00	4,1,0,0,0,0	0.65	3.06	3.62
140	4,1,0,0,0,0	4.22	4.28	4,1,0,0,0,0	4.28	0.01	0.00
144	4,2,4,1,4,1	4.87	4.62	4,2,4,1,0,0	4.49	0.09	0.03
210	4,2,3,1,4,1	12.78	10.93	4,2,3,1,4,1	10.93	0.17	0.00
216	4,1,4,1,4,1	11.67	13.95	4,2,4,1,0,0	12.97	0.10	0.08
280	4,1,2,1,4,1	26.33	36.01	3,2,4,1,4,1	26.14	0.01	0.38
288	4,1,4,1,4,1	22.40	31.58	4,2,4,1,4,1	24.14	0.07	0.31
350	4,1,2,1,4,1	52.53	66.73	4,2,4,1,2,1	48.99	0.07	0.36
351	4,2,1,1,4,1	58.63	88.54	3,2,3,1,0,0	63.32	0.07	0.40
352	4,1,3,1,4,1	47.24	66.83	4,2,4,1,4,1	42.43	0.11	0.57
360	4,1,4,1,4,1	45.17	60.32	4,2,3,1,4,1	49.30	0.08	0.22
420	4,1,4,1,4,1	73.88	94.36	4,2,3,1,4,1	76.49	0.03	0.23
432	4,2,4,1,4,1	95.01	77.41	4,2,4,1,4,1	77.41	0.23	0.00
490	4,2,2,1,4,1	145.55	129.54	3,2,4,1,4,1	131.43	0.11	0.01
504	4,2,3,2,4,1	217.06	197.17	3,2,4,2,4,1	216.29	0.00	0.09
630	4,2,3,1,4,1	285.37	246.52	4,2,3,1,4,1	246.52	0.16	0.00
640	4,2,4,1,4,1	287.26	243.16	4,2,4,1,4,1	243.16	0.18	0.00
650	4,2,1,1,4,1	340.58	428.90	3,2,4,1,3,1	424.90	0.20	0.01
660	4,1,4,1,4,1	312.60	335.91	4,2,4,1,0,0	325.19	0.04	0.03

表 53 hpcmw-solver-test プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル
($k=1.0$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
70	4,2,1,2,4,1	0.59	1.21	1,2,4,1,4,1	0.85	0.31	0.42
72	0,0,0,0,4,1	0.23	1.57	4,1,0,0,0,0	0.65	0.64	1.41
140	4,1,0,0,0,0	3.86	4.28	4,1,0,0,0,0	4.28	0.10	0.00
144	4,1,4,1,0,0	5.29	5.55	4,2,4,1,0,0	4.49	0.18	0.24
210	4,2,3,1,4,1	14.46	10.93	4,2,3,1,4,1	10.93	0.32	0.00
216	4,1,4,1,4,1	14.51	13.95	4,2,4,1,0,0	12.97	0.12	0.08
280	4,1,2,1,4,1	26.47	36.01	3,2,4,1,4,1	26.14	0.01	0.38
288	4,1,4,1,4,1	23.55	31.58	4,2,4,1,4,1	24.14	0.02	0.31
350	4,1,2,1,4,1	49.31	66.73	4,2,4,1,2,1	48.99	0.01	0.36
351	4,1,1,1,4,1	55.65	71.94	3,2,3,1,0,0	63.32	0.12	0.14
352	4,1,3,1,4,1	45.19	66.83	4,2,4,1,4,1	42.43	0.07	0.57
360	4,1,4,1,4,1	43.77	60.32	4,2,3,1,4,1	49.30	0.11	0.22
420	4,1,4,1,4,1	67.47	94.36	4,2,3,1,4,1	76.49	0.12	0.23
432	4,2,4,1,4,1	93.00	77.41	4,2,4,1,4,1	77.41	0.20	0.00
490	4,2,2,1,4,1	127.39	129.54	3,2,4,1,4,1	131.43	0.03	0.01
504	4,2,3,2,4,1	203.62	197.17	3,2,4,2,4,1	216.29	0.06	0.09
630	4,1,2,1,4,1	260.96	378.59	4,2,3,1,4,1	246.52	0.06	0.54
640	4,2,4,1,4,1	264.77	243.16	4,2,4,1,4,1	243.16	0.09	0.00
650	4,2,1,1,4,1	315.99	428.90	3,2,4,1,3,1	424.90	0.26	0.01
660	4,1,4,1,4,1	244.63	335.91	4,2,4,1,0,0	325.19	0.25	0.03

表 54 HPL プロセッサ 3 種類 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	2,1,1,2,0,0	-0.88	3.48	4,1,0,0,0,0	1.06	1.83	2.28
2400	4,1,0,0,0,0	2.52	2.54	4,1,0,0,0,0	2.54	0.01	0.00
3200	4,1,0,0,0,0	4.92	4.94	4,1,0,0,0,0	4.94	0.00	0.00
4800	4,1,4,1,0,0	12.01	11.98	4,1,4,1,0,0	11.98	0.00	0.00
6400	4,1,4,1,0,0	23.08	23.05	4,1,4,1,0,0	23.05	0.00	0.00
8000	4,1,4,1,0,0	39.18	39.73	4,1,4,1,0,0	39.73	0.01	0.00
9600	4,2,2,2,4,1	56.69	104.99	4,1,4,1,0,0	62.78	0.10	0.67

表 55 HPL プロセッサ 3 種類 P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	4,1,4,1,4,1	-0.96	1.7	4,1,0,0,0,0	1.06	1.91	0.60
2400	4,1,4,1,4,1	-2.63	3.55	4,1,0,0,0,0	2.54	2.04	0.40
3200	4,1,4,1,4,1	-4.65	6.63	4,1,0,0,0,0	4.94	1.94	0.34
4800	4,1,4,1,4,1	-6.45	15.41	4,1,4,1,0,0	11.98	1.54	0.29
6400	4,1,4,1,4,1	-0.72	28.66	4,1,4,1,0,0	23.05	1.03	0.24
8000	4,2,4,1,4,1	3.80	58.94	4,1,4,1,0,0	39.73	0.90	0.48
9600	4,2,4,1,4,1	51.32	88.42	4,1,4,1,0,0	62.78	0.18	0.41

表 56 HPL プロセッサ 3 種類 NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
1600	4,1,4,1,4,1	-2.96	1.7	4,1,0,0,0,0	1.06	3.80	0.60
2400	4,1,4,1,4,1	-1.85	3.55	4,1,0,0,0,0	2.54	1.73	0.40
3200	4,1,4,1,4,1	0.76	6.63	4,1,0,0,0,0	4.94	0.85	0.34
4800	4,1,4,1,4,1	9.16	15.41	4,1,4,1,0,0	11.98	0.24	0.29
6400	4,1,0,0,4,1	20.59	23.05	4,1,4,1,0,0	23.05	0.11	0.00
8000	4,1,0,0,4,1	37.15	39.73	4,1,4,1,0,0	39.73	0.06	0.00
9600	4,1,0,0,4,1	59.81	62.78	4,1,4,1,0,0	62.78	0.05	0.00

表 57 FFTE プロセッサ 3 種類 N-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	6,2,8,2,4,1	-1.65E-02	7.05E-03	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	3.96	0.26
2^{17}	8,2,8,2,0,0	6.98E-03	1.25E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	0.38	0.12
2^{18}	8,2,8,2,0,0	1.36E-02	2.57E-02	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	0.35	0.23
2^{19}	2,1,7,1,7,1	5.51E-02	5.43E-02	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	0.09	0.08
2^{20}	7,1,7,1,2,1	1.03E-01	1.17E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	0.03	0.10
2^{21}	5,2,1,1,5,1	-9.93E-01	5.38E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	5.35	1.36
2^{22}	5,2,1,1,5,1	-5.00E+00	7.02E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	17.99	1.38
2^{23}	5,2,1,1,5,1	-1.67E+01	1.35E+00	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	25.47	0.98

表 58 FFTE プロセッサ 3 種類 P-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	8,1,1,1,7,1	4.42E-03	5.82E-03	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	0.21	0.04
2^{17}	8,1,1,1,7,1	3.04E-03	1.51E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	0.73	0.35
2^{18}	8,2,8,1,8,1	-1.79E-02	2.65E-01	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	1.85	11.64
2^{19}	8,2,8,1,8,1	-5.18E-02	3.34E-01	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	2.03	5.62
2^{20}	8,2,8,1,8,1	-9.59E-02	3.39E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	1.91	2.20
2^{21}	8,2,8,1,8,1	-1.36E-01	5.61E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	1.60	1.46
2^{22}	8,2,8,1,8,1	-1.22E-01	2.94E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	1.41	0.00
2^{23}	8,2,8,1,8,1	9.72E-02	6.83E-01	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	0.86	0.00

表 59 FFTE プロセッサ 3 種類 NP-T モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	0,0,4,2,0,0	-9.42E-02	1.79E-02	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	17.89	2.21
2^{17}	0,0,4,2,0,0	-7.57E-02	3.97E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	7.78	2.55
2^{18}	0,0,4,2,0,0	-1.73E-02	8.48E-02	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	1.83	3.05
2^{19}	0,0,8,2,0,0	4.88E-02	1.02E-01	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	0.03	1.02
2^{20}	8,2,0,0,0,0	1.15E-01	1.11E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	0.09	0.04
2^{21}	8,2,8,1,8,1	2.14E-01	5.61E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	0.06	1.46
2^{22}	8,2,8,1,8,1	4.04E-01	2.94E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	0.37	0.00
2^{23}	8,2,8,1,8,1	7.82E-01	6.83E-01	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	0.15	0.00

表 60 FFTE プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル ($k=0.8$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	0,0,4,2,0,0	-1.29E-01	1.79E-02	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	24.16	2.21
2^{17}	0,0,4,2,0,0	-1.23E-01	3.97E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	11.98	2.55
2^{18}	0,0,4,2,0,0	-7.38E-02	8.48E-02	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	4.52	3.05
2^{19}	8,1,1,1,7,1	5.00E-02	7.07E-02	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	0.01	0.40
2^{20}	8,1,0,0,0,0	1.14E-01	1.09E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	0.08	0.03
2^{21}	8,1,0,0,0,0	2.23E-01	2.28E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	0.02	0.00
2^{22}	8,1,0,0,0,0	4.40E-01	4.77E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	0.50	0.62
2^{23}	8,2,8,1,8,1	8.12E-01	6.83E-01	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	0.19	0.00

表 61 FFTE プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル ($k=0.6$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	0,0,4,2,0,0	-1.29E-01	1.79E-02	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	24.16	2.21
2^{17}	0,0,4,2,0,0	-1.23E-01	3.97E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	11.98	2.55
2^{18}	0,0,4,2,0,0	-7.38E-02	8.48E-02	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	4.52	3.05
2^{19}	8,1,1,1,7,1	5.00E-02	7.07E-02	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	0.01	0.40
2^{20}	8,1,0,0,0,0	1.14E-01	1.09E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	0.08	0.03
2^{21}	8,1,0,0,0,0	2.23E-01	2.28E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	0.02	0.00
2^{22}	8,1,0,0,0,0	4.40E-01	4.77E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	0.50	0.62
2^{23}	8,2,8,1,8,1	8.12E-01	6.83E-01	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	0.19	0.00

表 62 FFTE プロセッサ 3 種類 グリッチを削除した NP-T モデル ($k=0.4$)

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
2^{16}	0,0,4,2,0,0	-1.29E-01	1.79E-02	7,1,3,1,6,1	5.58E-03	24.16	2.21
2^{17}	0,0,4,2,0,0	-1.23E-01	3.97E-02	8,1,8,1,0,0	1.12E-02	11.98	2.55
2^{18}	0,0,4,2,0,0	-7.38E-02	8.48E-02	8,2,7,2,2,1	2.10E-02	4.52	3.05
2^{19}	8,1,1,1,7,1	5.00E-02	7.07E-02	8,1,0,0,0,0	5.04E-02	0.01	0.40
2^{20}	8,1,0,0,0,0	1.14E-01	1.09E-01	8,1,8,1,0,0	1.06E-01	0.08	0.03
2^{21}	8,1,0,0,0,0	2.23E-01	2.28E-01	5,1,4,1,7,1	2.28E-01	0.02	0.00
2^{22}	8,1,0,0,0,0	4.40E-01	4.77E-01	8,2,8,1,8,1	2.94E-01	0.50	0.62
2^{23}	8,2,8,1,8,1	8.12E-01	6.83E-01	8,2,8,1,8,1	6.83E-01	0.19	0.00

表 63 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 P-T8 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	0,0,0,0,4,1	2.20E-04	1.04×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	0.62	0.79
48	4,1,0,0,0,0	1.16×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.07	0.00
64	4,2,0,0,0,0	2.48×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.01	0.00
80	4,2,4,1,4,1	4.41×10^{-3}	4.93×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.06	0.18
96	4,2,4,1,4,1	7.11×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.04	0.04
112	4,2,4,1,4,1	9.77×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.02	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.24×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.27	0.07
160	4,1,0,0,0,0	3.51×10^{-2}	3.29×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.30	0.22
192	4,1,0,0,0,0	5.84×10^{-2}	5.64×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.03	0.00
256	4,1,0,0,0,0	1.30×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.25	0.26

表 64 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 P-T7 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	4,1,0,0,0,0	6.25E-04	6.36E-04	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	0.08	0.10
48	4,1,0,0,0,0	1.20×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.03	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.52×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.00	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.75×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.14	0.10
96	4,1,0,0,0,0	8.08×10^{-3}	7.59×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.10	0.03
112	4,2,4,1,4,1	8.68×10^{-3}	1.28×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.13	0.28
128	4,2,4,1,4,1	1.38×10^{-2}	1.81×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.19	0.06
160	4,2,4,1,4,1	3.24×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.21	0.21
192	4,1,0,0,0,0	6.12×10^{-2}	5.64×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.09	0.00
256	4,1,0,0,0,0	1.41×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.36	0.26

表 65 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 P-T6 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	4,1,0,0,0,0	6.13E-04	6.36E-04	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	0.06	0.10
48	4,1,4,1,4,1	8.62E-04	1.44×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.31	0.16
64	4,1,0,0,0,0	2.53×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.01	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.73×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.13	0.10
96	4,1,0,0,0,0	8.06×10^{-3}	7.59×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.09	0.03
112	4,2,4,1,4,1	8.32×10^{-3}	1.28×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.17	0.28
128	4,1,4,1,4,1	9.45×10^{-3}	1.89×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.45	0.10
160	4,1,4,1,4,1	1.91×10^{-2}	2.96×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.29	0.10
192	4,1,4,2,4,1	3.03×10^{-2}	7.99×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.46	0.42
256	0,0,4,1,0,0	3.23×10^{-2}	3.58×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.69	2.44

表 66 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 NP-T8 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	0,0,4,1,0,0	-1.11×10^{-3}	8.81E-04	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	2.92	0.52
48	4,1,0,0,0,0	1.14×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.08	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.47×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.01	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.76×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.14	0.10
96	4,2,4,1,4,1	7.19×10^{-3}	7.66×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.03	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.62×10^{-3}	1.29×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.14	0.29
128	4,2,4,1,4,1	1.47×10^{-2}	1.84×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.14	0.08
160	4,1,0,0,0,0	3.51×10^{-2}	3.29×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.30	0.22
192	4,1,0,0,0,0	5.84×10^{-2}	5.64×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.04	0.00
256	4,1,0,0,0,0	1.30×10^{-1}	1.31×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.25	0.26

表 67 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 NP-T7 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	0,0,0,0,4,1	-7.86E-05	1.04×10^{-3}	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	1.14	0.79
48	4,1,0,0,0,0	1.19×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.04	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.51×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.00	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.75×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.14	0.10
96	4,2,4,1,4,1	5.96×10^{-3}	7.67×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.19	0.04
112	4,2,4,1,4,1	9.13×10^{-3}	1.28×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.09	0.28
128	4,2,4,1,4,1	1.34×10^{-2}	1.81×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.22	0.06
160	4,2,4,1,4,1	2.57×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.04	0.21
192	4,2,4,1,4,1	4.43×10^{-2}	5.98×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.21	0.06
256	4,2,4,1,4,1	1.06×10^{-1}	1.29×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.01	0.24

表 68 HimenoBMT プロセッサ 3 種類 NP-T6 モデル

サイズ N	予測による最良構成			実測による最良構成		誤差	
	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	τ	$\hat{\tau}$	$P_1, M_1, P_2, M_2, P_3, M_3$	\hat{T}	$\frac{\tau - \hat{T}}{\hat{T}}$	$\frac{\hat{\tau} - \hat{T}}{\hat{T}}$
32	2,1,0,0,0,0	6.27E-04	6.36E-04	3,1,0,0,0,0	5.80E-04	0.08	0.10
48	4,1,0,0,0,0	1.20×10^{-3}	1.24×10^{-3}	4,1,0,0,0,0	1.24×10^{-3}	0.04	0.00
64	4,1,0,0,0,0	2.51×10^{-3}	2.52×10^{-3}	4,1,4,1,4,1	2.51×10^{-3}	0.00	0.00
80	4,1,0,0,0,0	4.75×10^{-3}	4.58×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	4.17×10^{-3}	0.14	0.10
96	4,2,4,1,4,1	6.50×10^{-3}	7.67×10^{-3}	4,2,3,1,4,1	7.38×10^{-3}	0.12	0.04
112	4,2,4,1,4,1	8.33×10^{-3}	1.28×10^{-2}	4,1,4,1,4,1	1.00×10^{-2}	0.17	0.28
128	4,2,4,1,4,1	1.19×10^{-2}	1.81×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	1.71×10^{-2}	0.31	0.06
160	4,2,4,1,4,1	2.20×10^{-2}	3.25×10^{-2}	4,2,4,1,0,0	2.69×10^{-2}	0.18	0.21
192	4,2,4,1,4,1	3.67×10^{-2}	5.98×10^{-2}	4,1,0,0,0,0	5.64×10^{-2}	0.35	0.06
256	4,2,4,1,4,1	8.40×10^{-2}	1.29×10^{-1}	4,2,4,1,3,1	1.04×10^{-1}	0.19	0.24

A.2 PC クラスタ構築時の注意点

本研究で測定中に発見した問題点とその対処方法を以下に示す．これらの問題点は PC クラスタの性能を低下させる．問題サイズによっては性能が著しく悪化するため，予測モデルの精度が低下することがあった．安定した性能のクラスタ環境の構築は，高精度モデルの構築に必要である．

A.2.1 MPICH 通信バッファサイズ

本研究の測定中，MPICH の通信バッファサイズを変更することで性能が変わることを確認した．なお通信バッファサイズは MPICH の配布ファイル内，`mpid/ch_p4/p4/lib/p4_sock_util.h` に記載されている．

表 69 は HimenoBMT において，Xeon ノード 16 台（各 1 プロセス/ノード）で測定したときに，通信バッファサイズと性能の関係を示す．MPICH では標準で 16 KB のバッファサイズが定義されている．しかし問題サイズ $N = 128$ で性能するため，今回は通信バッファサイズを 8 KB に変更して測定を行った．

性能 [MFLOPS]					
	MPICH バッファサイズ				
N	4 KB	8 KB	16 KB	32 KB	64 KB
32	1369	1433	1433	1493	1440
48	1590	2106	2106	2124	2108
64	492	2793	2793	2832	2795
96	601	3025	3025	3378	3026
128	723	3797	1434	3392	1431
192	2768	4219	3933	3916	3998
256	3127	4191	4091	4080	4152

表 69 MPICH バッファサイズと HimenoBMT の性能

A.2.2 NIC

PC クラスタに利用する NIC は、各応用の測定前に十分な通信速度がでているか、通信速度に異常がないかを確認するべきである。本研究で利用したクラスタ G_3 に標準搭載されている Marvell Yukon Gigabit Ethernet と、PCI バス上の Intel PRO/1000 GT Desktop Adapter の通信速度の違いを図 48 に示す。測定には 2 ノードを用い、NetPipe の TCP 版プログラムを利用して測定を行っている。

Marvell Yukon Gigabit Ethernet は通信サイズにより性能が大きく上下している。このような NIC を利用した場合、各応用の問題サイズによって通信時間が大きく異なり、モデルの精度低下を招くため、測定前に確かめるべきである。

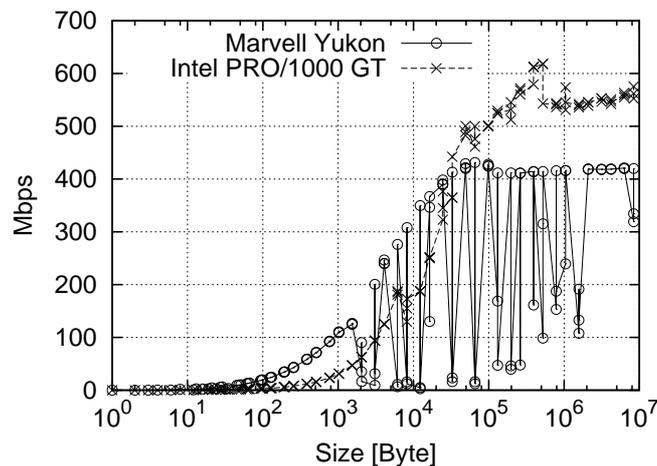


図 48 NIC の通信速度への影響

A.2.3 サブクラスタ間の接続

実行時間に対して、通信時間が支配的な応用ではサブクラスタ間の接続も重要である。例として FFTE ではノード間の通信を Alltoall 命令を使って行っている。Alltoall 命令は通信コストの高い命令であり、FFTE の実行時間は通信時間の影響が大きい。

そこでサブクラスタ G_2, G_3 を 2 つのスイッチに別々に接続してスイッチ間を 1000BASE-TX で接続する方法と、1 つのスイッチにまとめる方法で Alltoall 通信時間の比較を行った。図 49 は $(P_2, M_2, P_3, M_3) = (8, 1, 8, 1)$ の構成で、1 台あたりの通信サイズを変更しながら Alltoall 通信に要する時間を測定した結果である。2 台のスイッチを利用した場合、通信時間が増大し通信時間が不安定に

なることがわかる。

通信時間の差が実行時間に与える影響を示す。図 50 はスイッチ 1 台と 2 台の環境での FFTE 実行時間である。FFTE は通信時間の影響が大きいため、実行時間に大きな差がでた。スイッチ 2 台では性能が低下し、スケーラブルな性能ではなくなっている。

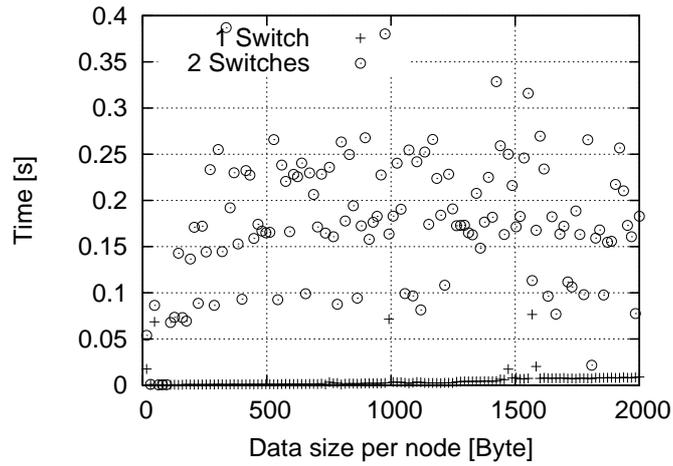


図 49 サブクラスタ間接続の通信速度への影響

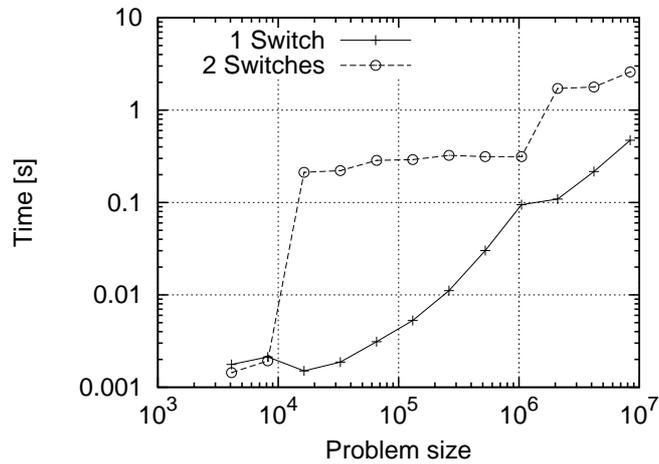


図 50 サブクラスタ間接続による FFTE 実行時間への影響

A.2.4 MTU

通信時間が支配的である場合，MTU も実行時間に影響を与える．MTU とは 1 回の通信で転送できる最大サイズのことである．今回のクラスタ環境では MTU=1500[Byte] が標準値で使用されている．なお，本研究で使用したスイッチとサブクラスタ G_2, G_3 は MTU=9000 まで対応していることを確認している．

図 52 に MTU=1500, $(P_2, M_2, P_3, M_3) = (16, 1, 0, 0)$ で Alltoall 通信に要する時間を示す．1 台あたり 1500Byte を超える付近から通信時間が増加しており，MTU の影響と考えることができる．MTU を引き上げることで性能向上を見込むことができると考え，MTU=9000 で同様の測定を行った．図 52 に MTU=1500, 9000 での通信時間を示す．MTU を増加させても通信時間は短縮するとは限らないと解る．

図 53 に MTU=1500, 9000 での FFTE 実行時間を示す．MTU=1500 の構成が高速であることがわかる．MTU=9000 の場合，通信時間が増加するため FFTE の実行時間も増加していると考えられる．

近年は JumboFrame をサポートしているネットワーク機器が増えており，システムの MTU が変更されている場合もあると考えられる．測定前に MTU の値を調査し，通信時間が安定しているかどうか確かめてから，並列処理を行うのが望ましいだろう．

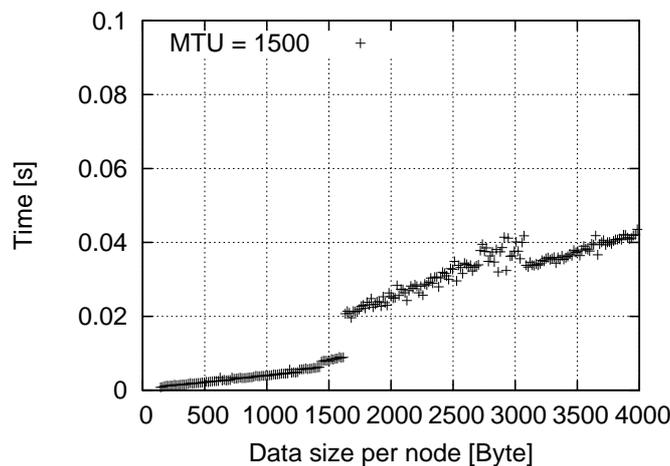


図 51 Alltoall 通信時間 MTU=1500

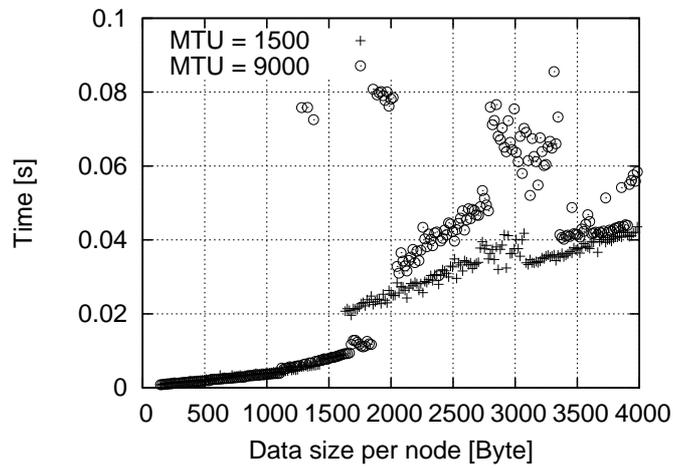


図 52 Alltoall 通信時間 MTU=1500 , 9000

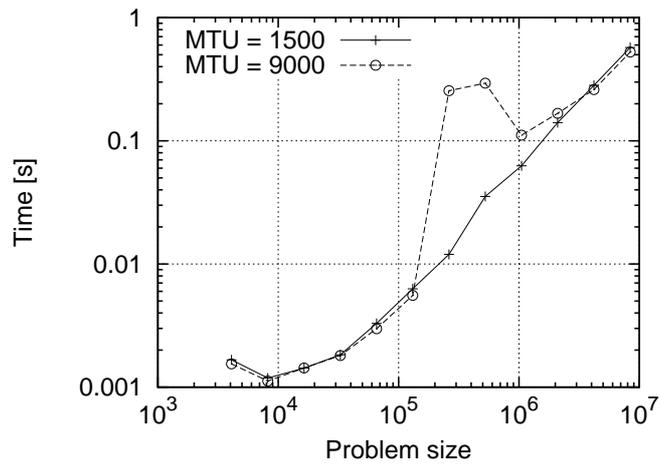


図 53 FFTE 実行時間 MTU=1500 , 9000